

VECTORES

Ejercicio n° 1.-

Consideramos la base de \mathbb{R}^3 formada por los vectores $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$ y $\vec{c}(3, 0, 1)$.

- Halla las coordenadas de $\vec{u}(4, -7, 14)$ respecto de la base anterior.
- Expresa, si es posible, el vector \vec{c} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{u} .

Ejercicio n° 2.-

a) Halla los valores de x , y , z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, siendo $\vec{u}(2, 0, -3)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$ y $\vec{w}(3, 2, -6)$.

b) Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

Ejercicio n° 3.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

c) Halla un vector, \vec{w} , tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Ejercicio n° 4.-

a) Se sabe que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que \vec{u} es combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} ? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, -2), (0, 0, 3)\}$.

Ejercicio n° 5.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

b) Expresa, si es posible, el vector \vec{d} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio n° 1.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

- Halla el valor de m para que \vec{a} y \vec{c} sean perpendiculares.
- Para $m = 2$, halla el ángulo que forman \vec{b} y \vec{c} .

Ejercicio n° 2.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a \vec{b} y tenga el mismo módulo que \vec{a} .

Ejercicio n° 3.-

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen el mismo módulo,

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2.$$

- ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?
- Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

Ejercicio n° 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

- Halla la proyección de \vec{u} sobre \vec{v} , así como el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
- Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , y que sea perpendicular a $(1, 0, 0)$.

Ejercicio n° 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 2, -2)$ y $\vec{w}(1, 2, x)$:

- Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
- Obtén el valor de x para que \vec{u} y \vec{w} formen un ángulo de 60° .

PRODUCTO VECTORIAL

Ejercicio n° 1.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

- Halla un vector, \vec{w} , de módulo 1, que sea perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} .
- ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} ?

Ejercicio n° 2.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$, siendo:

$$\vec{u}(2, -1, 1), \quad \vec{v}(0, 1, -1) \quad \text{y} \quad \vec{w}(1, 0, 1)$$

Ejercicio n° 3.-

- Halla un vector unitario que sea perpendicular a $(3, -1, 1)$ y a $(1, -2, 0)$.
- ¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.

Ejercicio n° 4.-

a) Demuestra que, si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

- Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Ejercicio n° 5.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

PRODUCTO MIXTO

Ejercicio n° 1.-

- a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k .
- b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} ?

Ejercicio n° 2.-

- a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.
- b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?:
 $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$

Ejercicio n° 3.-

- a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.
- b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} para el caso $m = 3$.

Ejercicio n° 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$; halla el valor de λ para que:

- a) Determinen un paralelepípedo de volumen 10.
- b) Sean linealmente dependientes.

Ejercicio n° 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

- a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.
- b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

SOLUCIONES EJERCICIOS VECTORES

Ejercicio n° 1.-

Consideramos la base de \square^3 formada por los vectores $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$ y $\vec{c}(3, 0, 1)$.

- a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4, -7, 14)$ respecto de la base anterior.
b) Expresa, si es posible, el vector \vec{c} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{u} .

Solución:

- a) Tenemos que encontrar tres números x , y , z , tales que:

$$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \text{ es decir:}$$

$$(4, 7, 14) = x(2, 1, 3), y(0, 2, 1), z(3, 0, 1)$$

$$(4, 7, 14) = (2x, 3z, x, 2y, 3x, y, z)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3z = 4 \\ -x + 2y = -7 \\ 3x - y + z = 14 \end{array} \right\} \text{ Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \\ 14 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-55}{-11} = 5; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 3 & 14 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 14 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2. \text{ Solución: } x = 5, y = -1, z = -2$$

Por tanto, las coordenadas de \vec{u} respecto de la base dada son $(5, -1, -2)$, es decir:

$$\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$$

- b) De la igualdad obtenida en a), tenemos que:

$$\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} \rightarrow 2\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b} - \vec{u} \rightarrow \vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{u}$$

Ejercicio n° 2.-

- a) Halla los valores de x , y , z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, siendo $\vec{u}(2, 0, -3)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$ y $\vec{w}(3, 2, -6)$.

- b) Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de \square^3 ?

Solución:

a) $x(2, 0, -3) + y(1, -2, 0) + z(3, 2, -6) = (0, 0, 0)$

$$(2x + y + 3z, -2y + 2z, -3x - 6z) = (0, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -3x - 6z = 0 \end{array} \right\} |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Para resolver el sistema, podemos prescindir de la 1ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left. \begin{array}{l} -2y = -2z \\ -3x = 6z \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \quad \text{Soluciones: } x = -2\lambda, y = \lambda, z = \lambda$$

- b) Según los resultados obtenidos en el apartado a), deducimos que los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son base.

Ejercicio nº 3.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

c) Halla un vector, \vec{w} , tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

Solución:

- a) Sí son linealmente independientes, puesto que si escribimos:

$$x(2, -1, 0) + y(3, 2, -1) = (0, 0, 0), \text{ es decir:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ -y = 0 \end{array} \right\}$$

este sistema solo tiene la solución trivial:

$$x = y = 0$$

- b) No forman una base de \mathbb{R}^3 , pues para obtener una base de \mathbb{R}^3 necesitamos tres vectores (linealmente independientes).

$$c) 2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v} \rightarrow 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} \rightarrow \vec{w} = \frac{1}{6}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{u}$$

Por tanto:

$$\vec{w} = \frac{1}{6}(3, 2, -1) - \frac{2}{3}(2, -1, 0) = \left(\frac{-5}{6}, 1, \frac{-1}{6} \right)$$

Ejercicio nº 4.-

a) Se sabe que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que \vec{u} es combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} ? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, -2), (0, 0, 3)\}$.

Solución:

a) No. Por ejemplo, si tomamos $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, y $\vec{w}(0, 2, 0)$:

– Son linealmente dependientes, pues $\vec{w} = 2\vec{v}$.

– Sin embargo, \vec{u} no es combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} .

b) Llamamos $\vec{b}(2, 1, 0)$, $\vec{c}(1, 0, -2)$, $\vec{d}(0, 0, 3)$ a los vectores de la base B . Tenemos que encontrar tres números, x , y , z , tales que:

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$$

Es decir:

$$(4, 3, 7) = x(2, 1, 0) + y(1, 0, -2) + z(0, 0, 3)$$

$$(4, 3, 7) = (2x + y, \quad x, \quad -2y + 3z)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x = 3 \\ -2y + 3z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 - 2x = -2 \\ 3z = 7 + 2y \rightarrow z = \frac{7 + 2y}{3} = 1 \end{array}$$

Las coordenadas de \vec{a} respecto de la base B son $(3, -2, 1)$, es decir:

$$\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$$

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de \mathbb{R}^3 ?

b) Expresa, si es posible, el vector \vec{d} como combinación lineal de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

Solución:

a) No forman una base, pues cuatro vectores en \mathbb{R}^3 siempre son linealmente dependientes.

b) Debemos encontrar tres números, x , y , z , tales que:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Es decir:

$$(-1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5)$$

$$(-1, 1, 3) = (x + y + z, \quad 2x + y, \quad 3x + y + 5z)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \end{array} \right\} \text{ Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{18}{-6} = -3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{0}{-6} = 0$$

Por tanto: $x = 2$, $y = -3$, $z = 0$

Y así: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 0\vec{c}$

PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio nº 1.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

- Halla el valor de m para que \vec{a} y \vec{c} sean perpendiculares.
- Para $m = 2$, halla el ángulo que forman \vec{b} y \vec{c} .

Solución:

$$a) \vec{c} = m\vec{a} - \vec{b} = m(1, -1, 0) - (0, 1, -1) = (m, -m-1, 1)$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = (1, -1, 0) \cdot (m, -m-1, 1) = m + m + 1 = 2m + 1 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

- Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2, -3, 1)$. Si llamamos α al ángulo que forman \vec{b} y \vec{c} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0,76 \rightarrow \alpha = 139^\circ 27' 51''$$

Ejercicio nº 2.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a \vec{b} y tenga el mismo módulo que \vec{a} .

Solución:

$$\vec{a}(2, -1, 0) \quad \vec{b}(1, 2, -1) \quad \vec{c}(x, y, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \rightarrow x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \end{array}$$

$$5y^2 = 5 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y = -1 \rightarrow x = 2 \\ y = 1 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2, y = -1$, que corresponde a $\vec{c}(2, -1, 0)$.
- $x = -2, y = 1$, que corresponde a $\vec{c}(-2, 1, 0)$.

Ejercicio n° 3.-

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen el mismo módulo,

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2.$$

- ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?
- Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

$$a) |\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 =$$

$$= 4 + 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) + 4 = 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 8 + 4\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \approx 3,70$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ + 4 = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \approx 1,53$$

$$b) (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 4 - 4 = 0$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$$

Ejercicio n° 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

- Halla la proyección de \vec{u} sobre \vec{v} , así como el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
- Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} , y que sea perpendicular a $(1, 0, 0)$.

Solución:

a) Proyección de \vec{u} sobre $\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

b) Un vector que sea combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} es de la forma $a\vec{u} + b\vec{v}$, es decir:

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) = (a + b, b, 0)$$

Para que sea perpendicular a $(1, 0, 0)$, su producto escalar ha de ser cero:

$$(a + b, b, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \rightarrow a + b = 0 \rightarrow b = -a$$

Por tanto, cualquier vector de la forma:

$$(0, b, 0), \text{ con } b \neq 0 \text{ cumple las condiciones exigidas.}$$

Ejercicio n° 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 2, -2)$ y $\vec{w}(1, 2, x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .

b) Obtén el valor de x para que \vec{u} y \vec{w} formen un ángulo de 60° .

Solución:

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \approx 4,90$$

Si llamamos α al ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} , tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{8 - 2 - 6}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares, es decir, } \alpha = 90^\circ.$$

b) Ha de cumplirse que:

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}, \text{ es decir:}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2-2+3x}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5+x^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3x}{\sqrt{70+14x^2}}$$

$$\sqrt{70+14x^2} = 6x \rightarrow 70+14x^2 = 36x^2 \rightarrow 70 = 22x^2$$

$$x^2 = \frac{70}{22} = \frac{35}{11} \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{\frac{35}{11}} \text{ (no vale, pues } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3x > 0) \\ x = \sqrt{\frac{35}{11}} \end{array} \right.$$

PRODUCTO VECTORIAL

Ejercicio n° 1.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

- Halla un vector, \vec{w} , de módulo 1, que sea perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} .
- ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} ?

Solución:

- Un vector perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 0) \times (2, 1, 1) = (3, -1, -5)$$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$$

Hay dos soluciones: $\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$ y $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}} \right)$

- Área = $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5,92 \text{ u}^2$

Ejercicio n° 2.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$, siendo:

$$\vec{u}(2, -1, 1), \vec{v}(0, 1, -1) \text{ y } \vec{w}(1, 0, 1)$$

Solución:

- Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$:

$$\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 2, 2)$$

$$\vec{b} = \vec{u} \times \vec{w} = (-1, -1, 1)$$

- El área del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b} es igual al módulo de su producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2, 2) \times (-1, -1, 1) = (4, -2, 2)$$

$$\text{Área} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} \approx 4,90 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a $(3, -1, 1)$ y a $(1, -2, 0)$.

b) ¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.

Solución:

a) Un vector perpendicular a los dos dados es:

$$(3, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -5)$$

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right)$$

También cumple las condiciones su opuesto:

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right)$$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo:

$$\vec{u} = (1, 0, 0) \quad \vec{v} = (1, 0, 0) \quad \vec{w} = (0, 1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{0} \times \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{u} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0) \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

Ejercicio nº 4.-

a) Demuestra que, si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, -1, 1)$ y a $\vec{v}(3, 0, -1)$.

Solución:

$$a) (\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} \stackrel{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

b) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 1) \times (3, 0, -1) = (1, 5, 3)$

Ejercicio n° 5.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

Solución:

• El área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} es igual a $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

• Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y hallamos su módulo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 0, 1) \times (0, m, 1) = (-m, -2, 2m)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-m)^2 + (-2)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + 4 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 4}$$

• Igualamos a 2:

$$\text{Área} = \sqrt{5m^2 + 4} = 2 \rightarrow 5m^2 + 4 = 4 \rightarrow 5m^2 = 0 \rightarrow m = 0$$

PRODUCTO MIXTO

Ejercicio n° 1.-

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k .

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} ?

Solución:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de k .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto:

$$\text{Volumen} = 12 \text{ u}^3$$

Ejercicio n° 2.-

- a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.
- b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?:

$$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$$

Solución:

- a) El volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17 \rightarrow \text{Volumen} = 17 \text{ u}^3$$

- b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \cdot (-17) = -34$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}] = 0 \quad (\text{el tercer vector depende linealmente de los dos primeros}).$$

Ejercicio n° 3.-

- a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.
- b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} para el caso $m = 3$.

Solución:

- a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$$

Ha de ser $m = 4$.

- b) Para $m = 3$, los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, y forman una base de \mathbb{R}^3 . Por tanto, cualquier vector de \mathbb{R}^3 , en particular $(2, 1, 0)$, depende linealmente de ellos.

Ejercicio n° 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$; halla el valor de λ para que:

- a) Determinen un paralelepípedo de volumen 10.
- b) Sean linealmente dependientes.

Solución:

- a) El volumen del paralelepípedo determinado por \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

$$\text{Volumen} = |2\lambda - 6| = 10 \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 \rightarrow 2\lambda = 16 \rightarrow \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 \rightarrow 2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$

- b) Su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = 3$$

Ejercicio nº 5.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

- a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.
b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

Solución:

- a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow \text{Volumen} = 4 \text{ u}^3$$

- b) Los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{a} han de ser linealmente dependientes (\vec{u} y \vec{v} son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \rightarrow \alpha = 4$$