FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

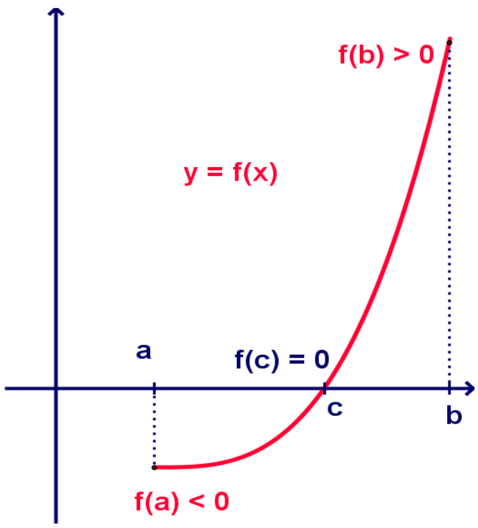
Teorema de Bolzano

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Las imágenes en los extremos del intervalo tienen signo distinto: $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Es decir la función corta al eje OX en el interior del intervalo



Teorema de Bolzano

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
$f(a).f(b) < 0$

Tesis: $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

Aplicación del teorema de Bolzano

El Tª de Bolzano es útil para determinar en algunas ocasiones si una ecuación tiene soluciones reales:

Ejemplo 1

Demostrar que la ecuación $4x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene una solución real.

1°. Se considera la función $f(x) = 4x^3 - 4x + 1$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$f(0) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(1) = 1 > 0$

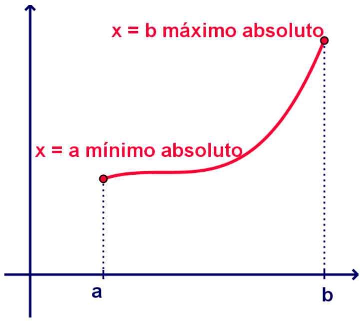
$f(-1) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(-2) = -23 < 0$

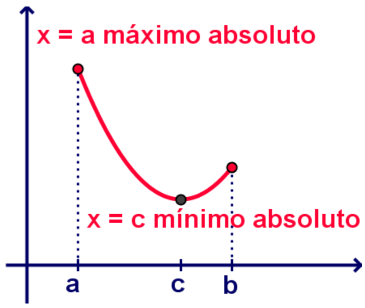
3°. Por tanto en el intervalo $[-2, -1]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

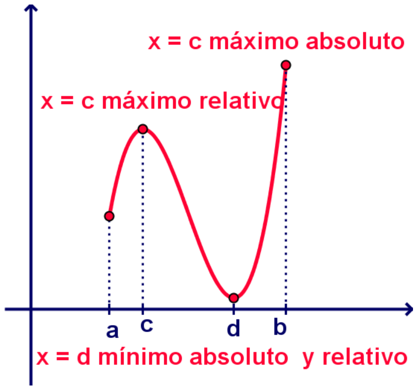
$\exists\, c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $4x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2, -1)$

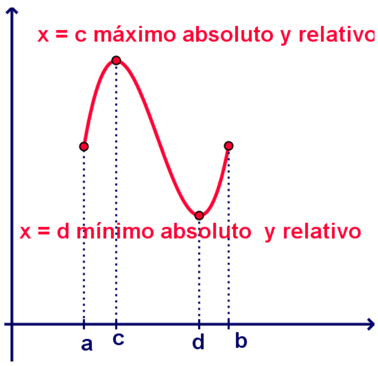
Teorema de Weierstrass

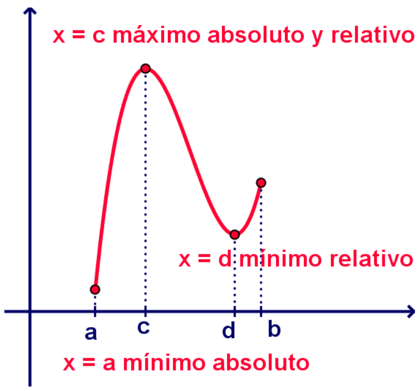
Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo absolutos











Como se observa en los dibujos anteriores los máximos y mínimos (extremos) absolutos se encuentran entre los relativos o los extremos del intervalo:

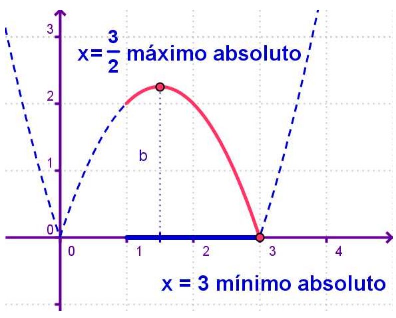
1º.- Se calculan los máximos y mínimos relativos

2º.- Se calculan las imágenes en estos máximos y mínimos relativos y en los extremos del intervalo

3º.- El mayor valor es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = |x^2 - 3x|$ Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,3]$, ¿en qué Tª te basas para asegurar su existencia . ?



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & si \quad x \in [1,3] \\ x^2 - 3x & si \quad x \notin (1,3) \end{cases}$$

Por tanto $x \in [1,3] \Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x$

1º.- $f'(x) = -2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \in [1,3]$ es máximo relativo (parábola)

2º.- $f(1) = 2 \;\; , \;\; f(3) = 0 \;\; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

3º.- máximo absoluto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ mínimo absoluto:$(3,0)$