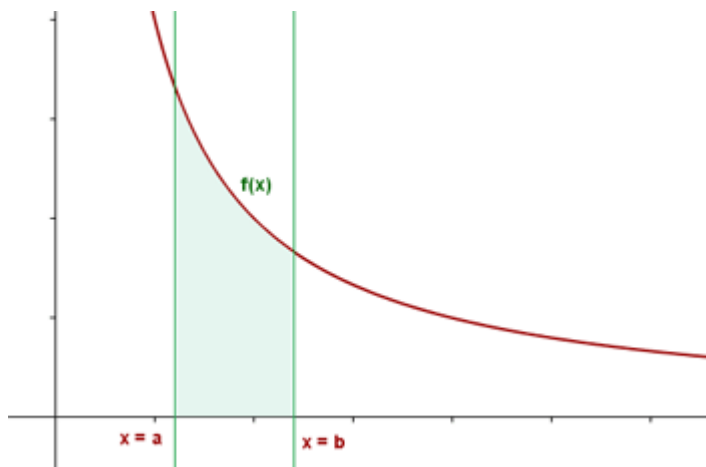


Integral definida

Dada una función $f(x)$ de variable real y un intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$, la **integral definida** es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y rectas $x = a$ y $x = b$.



Se representa por $\int_a^b f(x) dx$.

\int es el signo de integración.

a límite inferior de la integración.

b límite superior de la integración.

f(x) es el **integrando** o función a integrar.

dx es **diferencial de x**, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la **integral definida** cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3. Si c es un punto interior del intervalo $[a, b]$, la **integral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la suma de integrales (Propiedad de linealidad).

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

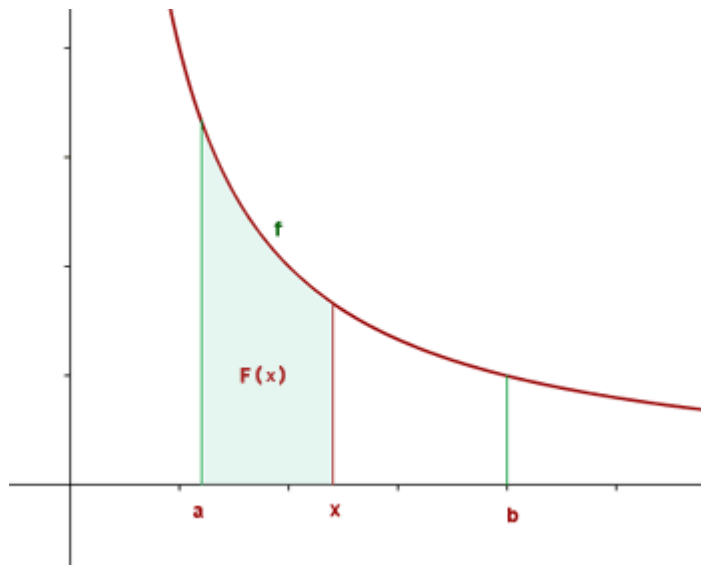
Función integral

Sea $f(t)$ una **función continua** en el intervalo $[a, b]$. A partir de esta función se define la **función integral**:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

que depende del límite superior de integración.

Geoméricamente la **función integral**, $F(x)$, representa el **área** del recinto limitado por la curva $y = f(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = x$.



A la **función integral**, $F(x)$, también se le llama **función de áreas** de f en el intervalo $[a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f(x)$ una función continua en (a,b) . Sea

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt =$$

Entonces

$$F'(x) = f(x)$$

El **teorema fundamental del cálculo** nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas: si una función continua primero se integra y luego se deriva, se recupera la función original.

Ejemplos

Calcular la derivada de las funciones:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$t = x$$

$$dt = 1$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = -\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$t = x$$

$$dt = 1$$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$t = x^2$$

$$dt = 2x$$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x$$

$$F(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$t = x^3$$

$$dt = 3x^2$$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^6} \cdot 3x^2$$

$$F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2} dt$$

$$t = x^2$$

$$dt = 2x$$

$$F'(x) = e^{x^4} \cdot 2x$$

Regla de Barrow

Isaac Barrow (1630-1677) fue un matemático inglés, cuya aportación más importante a las Matemáticas fue la unión del cálculo diferencial e integral. La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $G(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la **regla de Barrow**.

$$\int_{-1}^1 (3x^3 - x^2 + x - 1) dx$$

$$\int_{-1}^1 (3x^3 - x^2 + x - 1) dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{8}{3}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \sin x - \cos^6 x \sin x) dx = \left[-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

$$\int_2^4 \log x dx$$

$$u = \log x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = \frac{1}{x} \log e$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int_2^4 \log x dx = [x \log x]_2^4 - \int_2^4 \log e dx = [x \log x - x \log e]_2^4 =$$

$$= 4 \log 2^2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e =$$

$$= 8 \log 2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e = 6 \log 2 - 2 \log e$$

$$\int_0^{\pi^2} \text{sen}\sqrt{x} \, dx$$

Calculamos la integral definida por cambio de variable.

$$\int \text{sen}\sqrt{x} \, dx$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t \, dt$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$$x = 0 \qquad t^2 = 0 \qquad t = 0$$

$$x = \pi^2 \qquad t^2 = \pi^2 \qquad t = \pi$$

$$\int \text{sen} t \, 2t \, dt = 2 \int t \text{sen} t \, dt$$

Integramos por partes.

$$u = t \quad \xrightarrow{\text{derivar}} \quad u' = 1$$

$$v' = \text{sen} t \quad \xrightarrow{\text{integrar}} \quad v = -\text{cost}$$

$$2 \int t \text{sen} t \, dt = 2 \left(-t \text{cost} + \int \text{cost} \, dt \right) = 2 \left(-t \text{cost} + \text{sent} \right) + C$$

$$2 \int_0^{\pi} t \text{sen} t \, dt = 2 \left[-t \text{cost} + \text{sent} \right]_0^{\pi} = 2\pi$$

También se puede hacer sin transformar los límites de integración y volviendo a la variable inicial.

$$t = \sqrt{x}$$

$$\int \text{sen}\sqrt{x} \, dx = 2 \left(-\sqrt{x} \text{cos}\sqrt{x} + \text{sen}\sqrt{x} \right) + C$$

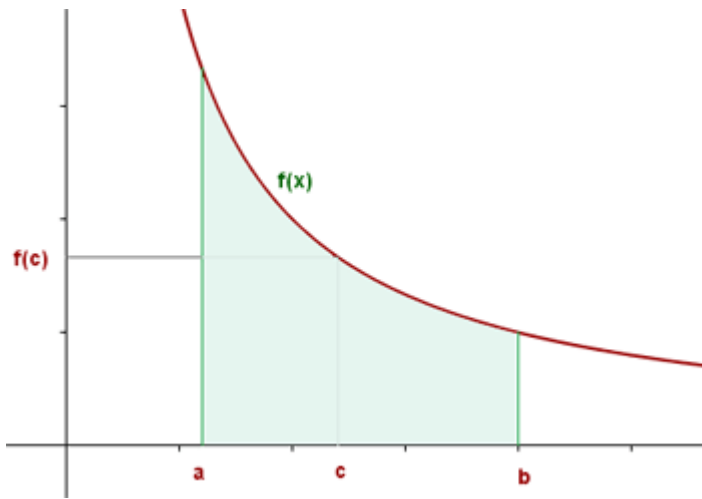
$$\int_0^{\pi^2} \text{sen}\sqrt{x} \, dx = 2 \left[-\sqrt{x} \text{cos}\sqrt{x} + \text{sen}\sqrt{x} \right]_0^{\pi^2} = 2\pi$$

Teorema de la media

El teorema de la media o teorema del valor medio para integrales dice que:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) \cdot f(c)$$



Ejemplos

1. Hallar el valor de c , del **teorema de la media**, de la función $f(x) = 3x^2$ en el intervalo $[-4, -1]$.

Como la función es continua en el intervalo $[-4, -1]$, se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_{-4}^{-1} 3x^2 \, dx = [x^3]_{-4}^{-1} = -1 + 64 = 63$$

$$63 = [-1 - (-4)] \cdot f(c)$$

$$f(c) = 21 \quad 3c^2 = 21 \quad c = -\sqrt{7}$$

La solución positiva no es válida porque no pertenece al intervalo.

2. ¿Es aplicable el **teorema del valor medio del cálculo integral** a la siguiente función en el intervalo $[0, 1]$?

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Como la función es continua en $[0, 1]$, se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \, dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$f(c) = (1-0)(\sqrt{2}-1) \quad f(c) = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \sqrt{2}-1 \quad c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Ejemplos de integrales definidas

1

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2} \right] = -\frac{5}{72}$$

2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2(2-1) = 2$$

3

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{98}{3}$$

4

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\sqrt{x^2-1} \right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

5

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{3} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

6

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

7

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (\sec^2 x - 1) \, dx = [\operatorname{tg} x - x]_0^{\pi} = -\pi$$

8

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x \right]_0^{\pi} = 0$$

9

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2 - 1) \right]_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \ln \sqrt{\frac{8}{3}}$$

10

$$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x} = \int_2^3 \ln^{-4} x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[-\frac{1}{3 \ln^3 x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3 \ln^3 3} + \frac{1}{3 \ln^3 2}$$

11

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x) \, dx =$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

12

$$\int_0^{\pi} \cos x e^{\operatorname{sen} x} \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos x e^{\operatorname{sen} x} \, dx = \left[e^{\operatorname{sen} x} \right]_0^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$$

13

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$$

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2x$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \text{sen } x$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \text{sen } x - 2 \int x \text{sen } x \, dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \text{sen } x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos x$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \text{sen } x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) =$$

$$= x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x + C$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx = \left[x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2 \text{sen } x \right]_0^{\pi} = -2\pi$$

14

$$\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 \, dx$$

$$\arccos x = t \quad x = \cos t \quad dx = -\text{sen } t \, dt$$

$$1 = \cos t \quad t = 0$$

$$-1 = \cos t \quad t = \pi$$

$$\int_{-1}^1 (\arccos x)^2 \, dx = -\int_{\pi}^0 t^2 \text{sen } t \, dt = \int_0^{\pi} t^2 \text{sen } t \, dt$$

$$u = t^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2t$$

$$v' = \text{sen } t \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos t$$

$$\int_0^{\pi} t^2 \text{sen } t \, dt = \left[-t^2 \cos t \right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos t \, dt$$

$$u = t \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$$v' = \cos t \xrightarrow{\text{integrar}} v = \text{sen } t$$

$$\int_0^{\pi} t^2 \text{sen } t \, dt = \left[-t^2 \cos t \right]_0^{\pi} + 2 \left(\left[t \text{sen } t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \text{sen } t \, dx \right) =$$

$$= \left[-t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\pi} = (\pi^2 - 4) u^3$$

15

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$x = t^2 \quad dx = 2t dt$$

$$4 = t^2 \quad t = 2$$

$$0 = t^2 \quad t = 0$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt =$$

$$= 2 \left[t - \ln(1+t) \right]_0^2 = 4 - 2 \ln 3$$

Aplicaciones de la integral

Área de una función y el eje de abscisas

1. La función es positiva

Si la función es positiva en un intervalo $[a, b]$ entonces la gráfica de la función está por encima del eje de abscisas. El **área de la función** viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Para hallar el área seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los **puntos de corte** con el eje OX, haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo la ecuación.

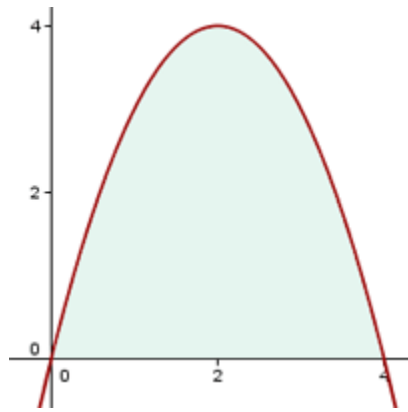
2º El **área** es igual a la **integral definida de la función** que tiene como límites de integración los puntos de corte.

Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

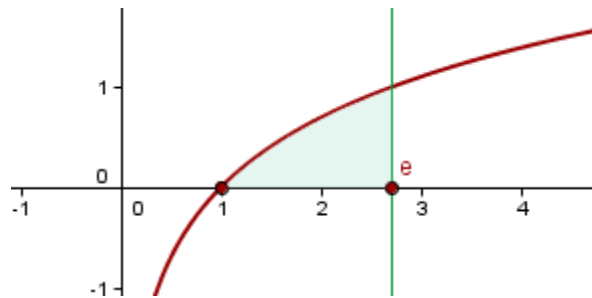
$$0 = 4x - x^2 \quad x = 0 \quad x = 4$$



En segundo lugar se calcula la integral:

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{32}{3} u^2$$

2. Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$.



En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$$\ln x = 0 \quad e^0 = 1 \quad (1, 0)$$

$$\int_0^1 \ln x dx$$

$$v = \ln x \xrightarrow{\text{derivar}} v' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\int_0^1 \ln x dx = [x(\ln x - 1)]_0^1 = 0 + 1 = 1 u^2$$

2. La función es negativa

Si la función es negativa en un intervalo $[a, b]$ entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas. El **área de la función** viene dada por un viene dada por:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

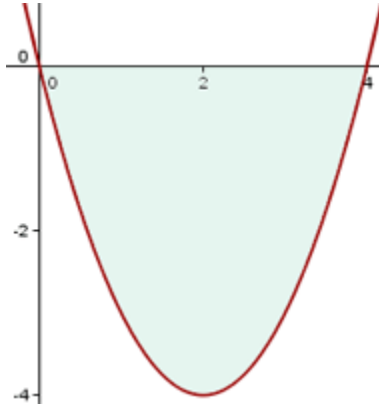
Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

$$0 = x^2 - 4x$$

$$x = 0$$

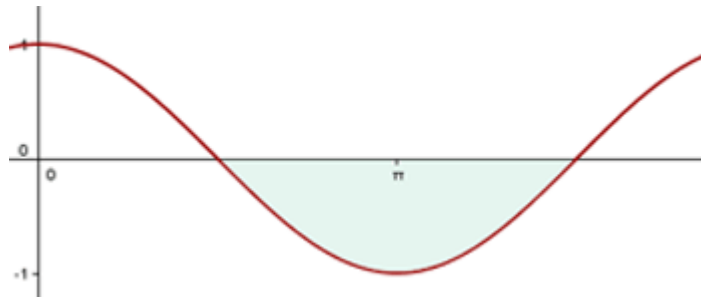
$$x = 4$$



$$A = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^4 = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = \frac{32}{3} u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje Ox entre $\pi/2$ y $3\pi/2$.



$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \left[\operatorname{sen} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2$$

$$|A| = 2u^2$$

3. La función toma valores positivos y negativos

En ese caso el el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el **área de la función** seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los puntos de corte con con el eje OX, haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo la ecuación.

2º Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.

3º El **área** es igual a la **suma de las integrales definidas** en valor absoluto de cada intervalo.

Ejemplos

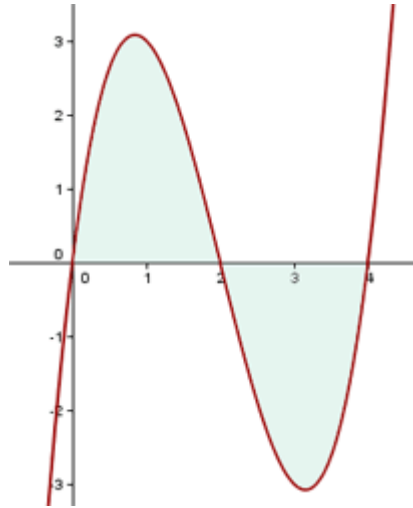
1. Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 4$$



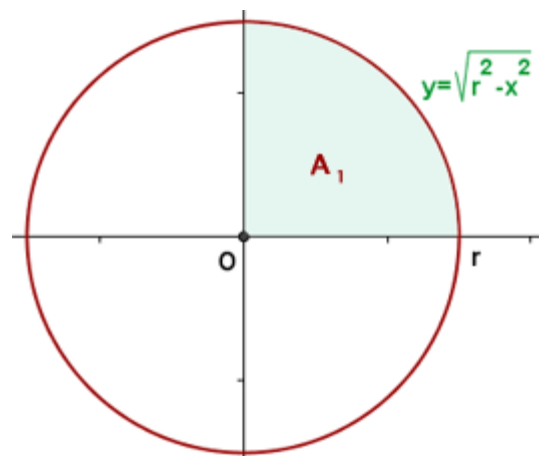
$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$$

El área, por razones de simetría, se puede escribir:

$$A = 2 \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 8u^2$$

2. Calcular el área del círculo de radio r .

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.



El área del círculo es cuatro veces el área del primer cuadrante.

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Calculamos la integral indefinida por cambio de variable.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

$$x = r \operatorname{sen} t$$

$$dx = r \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} &= \int \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} r \cos t \, dt = \int \sqrt{r^2 (1 - \operatorname{sen}^2 t)} r \cos t \, dt = \\ &= \int r^2 \cos^2 t \, dt = r^2 \int \cos^2 t \, dt = r^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2t \right] + C \end{aligned}$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$$x = 0 \qquad 0 = r \operatorname{sen} t \qquad \operatorname{sen} t = 0 \qquad t = 0$$

$$x = r \qquad r = r \operatorname{sen} t \qquad \operatorname{sen} t = 1 \qquad t = \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$A = 4A_1 = \pi r^2$$

Área comprendida entre dos funciones

El área comprendida entre dos funciones es igual al área de la función que está situada por encima menos el área de la función que está situada por debajo.

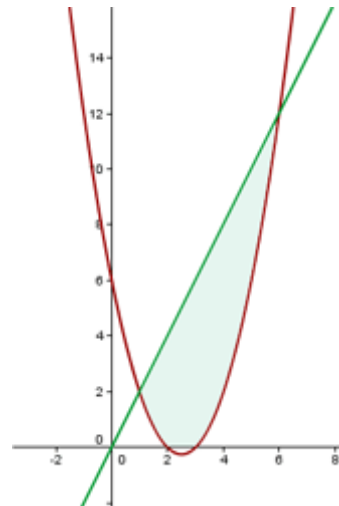
$$\int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx$$

Ejemplos

1. Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 6$$



De $x = 1$ a $x = 6$, la recta queda por encima de la parábola.

$$A = \int_1^6 (2x - x^2 + 5x - 6) dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_1^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{7 \cdot 6^2}{2} - 36 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6 \right) = \frac{89}{6} u^2$$

2. Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x \end{cases} \quad y^2 = 4y \quad (0,0) \quad (4,0)$$



De $x = 0$ a $x = 4$, la parábola queda por encima de la recta.

$$A = \int_0^4 \sqrt{4x} dx - \int_0^4 x dx = \int_0^4 (\sqrt{4x} - x) dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3} u^2$$

3. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

$$y = \frac{x^2}{3}$$

$$x_v = 0 \quad y_v = 0 \quad V(0,0)$$

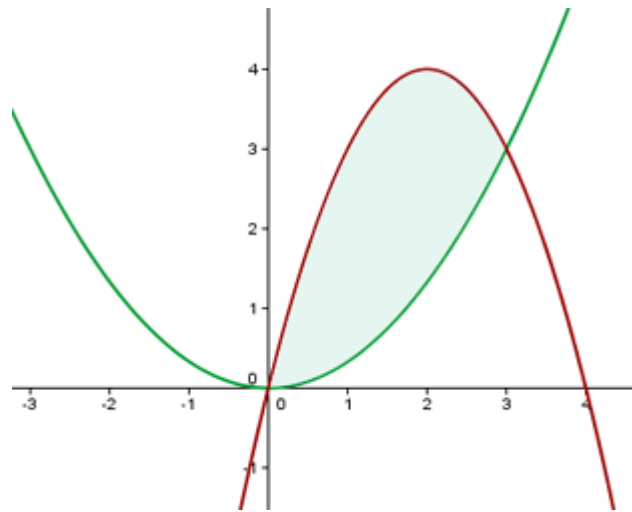
$$y = -x^2 + 4x$$

$$x_v = -\frac{4}{-2} = 2 \quad y_v = 4 \quad V(2,4)$$

$$-x^2 + 4x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3} & (0,0) & (3,3) \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \left(-x^2 + 4x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_0^3 \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4x \right) dx = \\ &= \left[-\frac{4}{9}x^3 + 2x^2 \right]_0^3 = -12 + 18 = 6u^2 \end{aligned}$$

4. Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

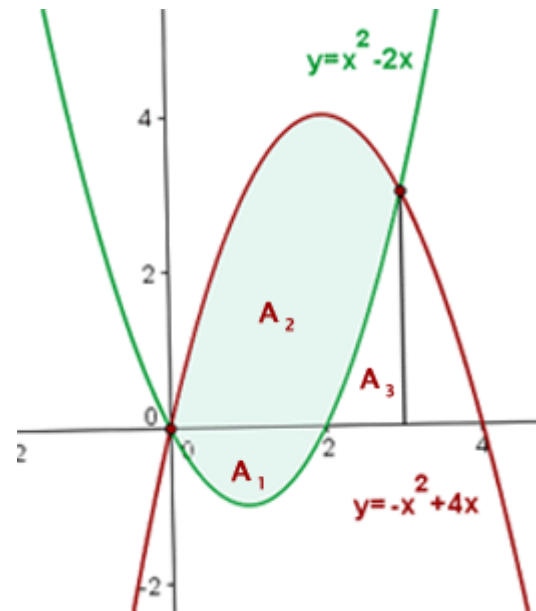
$$x_v = \frac{2}{2} = 1 \quad y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \quad V(1, -1)$$

$$0 = x^2 - 2x \quad 0 = x(x - 2) \quad (0,0) \quad (2,0)$$

$$x_v = \frac{-4}{-2} = 2 \quad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4 \quad V(2, 4)$$

$$0 = -x^2 + 4x \quad 0 = x(-x + 4) \quad (0,0) \quad (4,0)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \quad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \quad (0,0) \quad (3,3)$$



$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = -\frac{4}{3} \quad |A_1| = \frac{4}{3}u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 (-x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^3 = 9 \quad A_2 = 9u^2$$

$$A_3 = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \frac{4}{3} \quad A_3 = \frac{4}{3}u^2$$

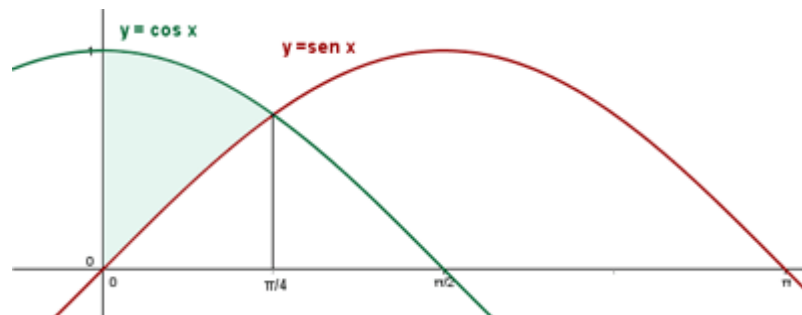
$$A = |A_1| + A_2 - A_3 \quad A = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9u^2$$

5. Hallar el área de de la región limitada por las funciones:

$$y = \text{sen } x, \quad y = \text{cos } x, \quad x = 0.$$

En primer lugar hallamos el punto de intersección de las funciones:

$$\begin{cases} y = \text{sen } x \\ y = \text{cos } x \end{cases} \quad \text{sen } x = \text{cos } x \quad x = \frac{\pi}{4}$$



La gráfica del coseno queda por encima de la gráfica del seno en el intervalo de integración.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} - 1)u^2$$

Volumen de un cuerpo de revolución

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $f(x)$ alrededor del eje OX y limitado por $x = a$ y $x = b$, viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ejemplos

1. Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por las curvas y las rectas dadas al girar en torno al eje OX:

$$y = \sin x \quad x = 0 \quad y \quad x = \pi$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} u^3$$

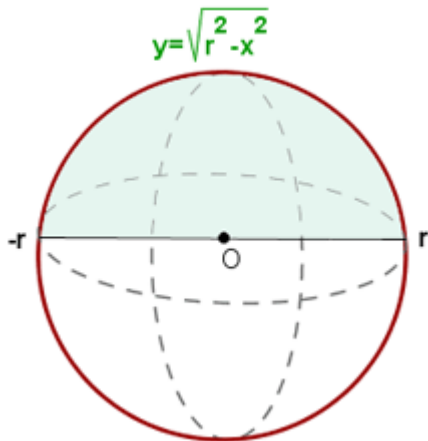
2. Calcular el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo limitado por las rectas $y = 2$, $x = 1$ y $x = 4$, y el eje OX al girar alrededor de este eje.

$$V = \pi \int_1^4 2^2 dx = 4\pi [x]_1^4 = 4\pi(4-1) = 12\pi u^3$$

3. Calcular el volumen de la esfera de radio r .

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Girando un semicírculo en torno al eje de abscisas se obtiene una esfera.



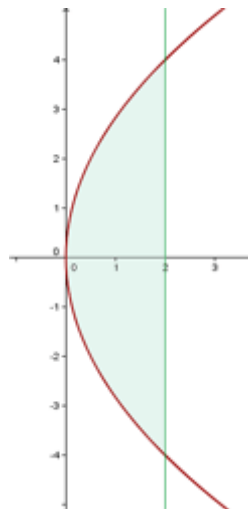
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left(\frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

4. Calcular el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2$, alrededor del eje OY.

Como gira alrededor del eje OY, aplicamos:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

El volumen será la diferencia del engendrado por la recta y el engendrado por la parábola entre los extremos $y = -4$ e $y = 4$.

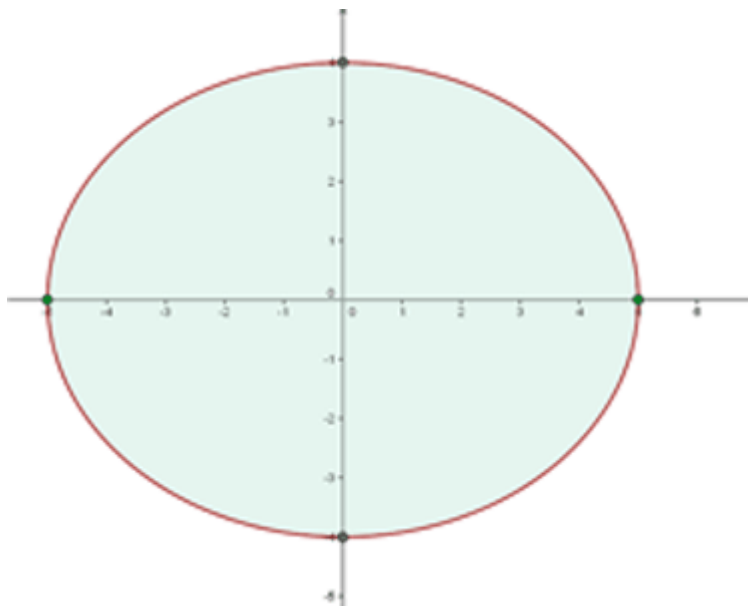


Como la parábola es simétrica con respecto al eje OX, el volumen es igual a dos veces el volumen engendrado entre $y = 0$ e $y = 4$.

$$V = 2\pi \int_0^4 2^2 dy - 2\pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy = 2\pi \left[4y - \frac{y^5}{320} \right]_0^4 = \frac{128}{5} \pi^3$$

5. Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, al girar:

- 1 Alrededor de su eje mayor.
- 2 Alrededor de su eje menor.



Como la elipse es simétrica al respecto de los dos ejes el volumen es el doble del engendrado por la porción de elipse del primer cuadrante en ambos casos.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \quad y^2 = \frac{400 - 16x^2}{25} \quad (5, 0)$$

$$V_1 = 2\pi \int_0^5 \left(\frac{400 - 16x^2}{25} \right) dx = 2\pi \left[16x - \frac{16}{75} x^3 \right]_0^5 = \frac{320}{3} \pi \text{ u}^3$$

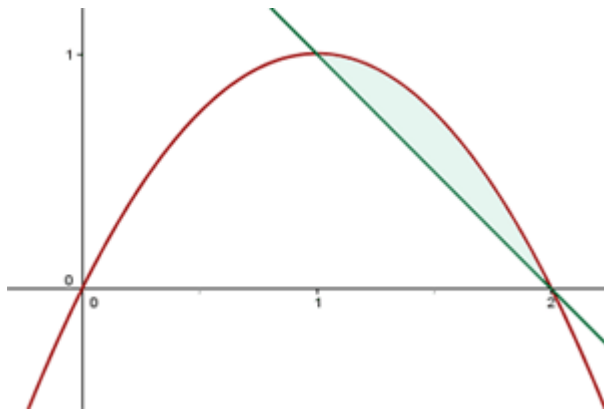
$$16x^2 + 25y^2 = 400 \quad x^2 = \frac{400 - 25y^2}{16} \quad (0, 4)$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{400 - 25y^2}{16} \right) dy = 2\pi \left[25y - \frac{25}{48} y^3 \right]_0^4 = \frac{400}{3} \pi \text{ u}^3$$

6. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad 2x - x^2 = -x + 2 \quad (1, 1) \quad (2, 0)$$



La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \left[(2x - x^2)^2 - (-x + 2)^2 \right] dx = \pi \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4) dx = \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x \right]_1^2 = \frac{\pi}{5} \text{ u}^3 \end{aligned}$$