Posiciones relativas de dos rectas

Rectas definidas por sus ecuaciones implícitas

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Si:

r = rango de la matriz de los coeficientes.

r'= rango de la matriz ampliada.

Las **posiciones relativas de dos rectas** vienen dadas por la siguiente tabla:

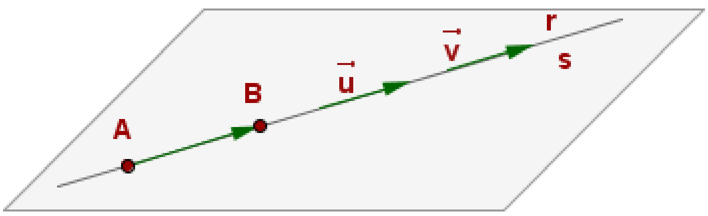
Posición	r	r'
Se cruzan	**3**	**4**
Secantes	**3**	**3**
Paralelas	**2**	**3**
Coincidentes	**2**	**2**

Rectas definidas por un punto y un vector

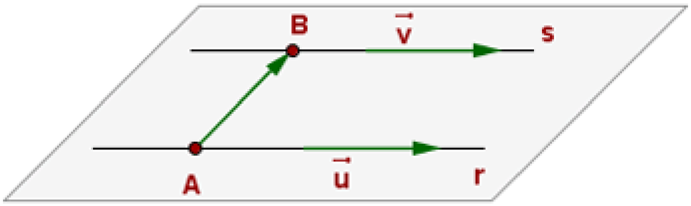
Si la recta r viene determinada por $A(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y la recta s por $B(x_2, y_2, z_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la **posición relativa de r y s** viene dada por la posición de $\overrightarrow{AB}\ \vec{u}\ y\ \vec{v}$

Si $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$ hay dos posibilidades:

1. Rectas coincidentes si $\frac{x_2 - x_1}{u_1} = \frac{y_2 - y_1}{u_2} = \frac{z_2 - z_1}{u_3}$.

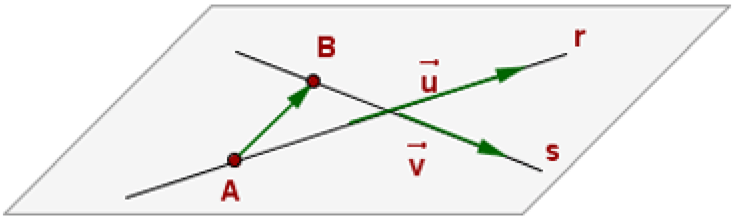


2. Rectas paralelas si . $\frac{x_2 - x_1}{u_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{u_2}$ o $\frac{x_2 - x_1}{u_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{u_3}$

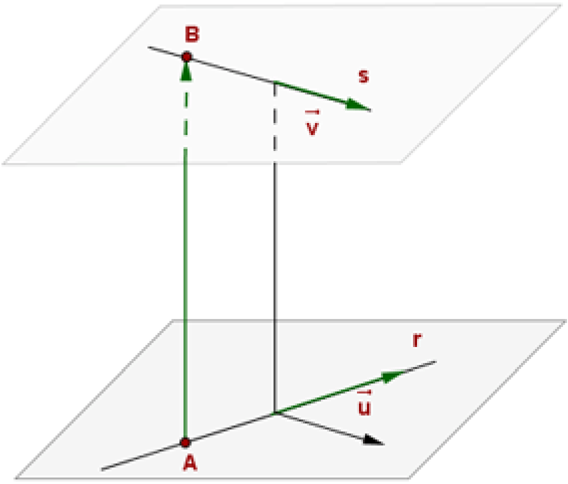


Si $\frac{u_1}{v_1} \neq \frac{u_2}{v_2} \neq \frac{u_3}{v_3}$ hay otras dos posibilidades:

3. Rectas secantes si $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & u_1 & v_1 \\ y_2 - y_1 & u_2 & v_2 \\ z_2 - z_1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$



4. Rectas que se cruzan si . $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & u_1 & v_1 \\ y_2 - y_1 & u_2 & v_2 \\ z_2 - z_1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$



Ejemplos

Hallar la **posición relativa de las rectas** r y s.

1. $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ $\quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

En primer lugar se pasan las ecuaciones continuas a **ecuaciones implícitas**.

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Hallamos el **rango** de la matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r = 3$$

Determinamos el rango de la matriz ampliada.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r' = 4$$

Comparamos los rangos

Las dos rectas se cruzan.

2. $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{3}$

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r = 3$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad r' = 3$$

Las dos rectas son secantes.

Posiciones relativas de una recta y un plano

1. La recta viene definida por dos planos secantes

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

Para estudiar la **posición relativa de la recta y el plano** discutimos el sistema:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Si:

r = rango de la matriz de los coeficientes.

r'= rango de la matriz ampliada.

Las **posiciones relativas de la recta y el plano** vienen dadas por la siguiente tabla:

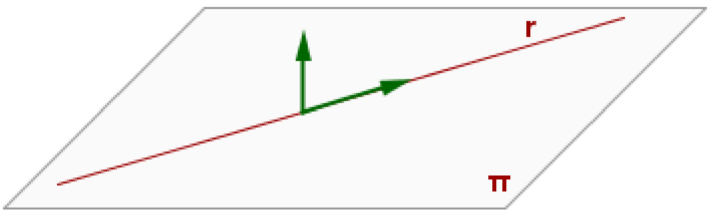
Posición	r	r'
Recta contenida en el plano	**2**	**2**
Recta y plano paralelos	**2**	**3**
Recta y plano secantes	**3**	**3**

2. La recta viene definida por un punto y un vector

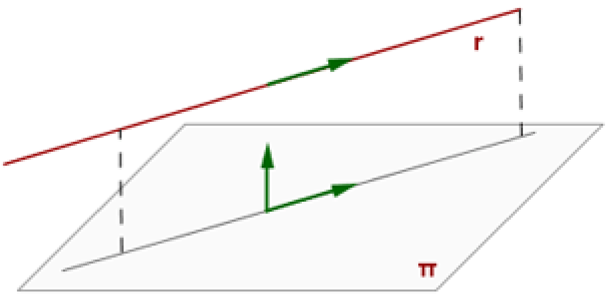
Sea una recta definida por el punto A y el vector $\vec{u}$. y un plano cuyo rector normal es $\vec{n}$. Las **posiciones relativas de la recta y el plano** son:

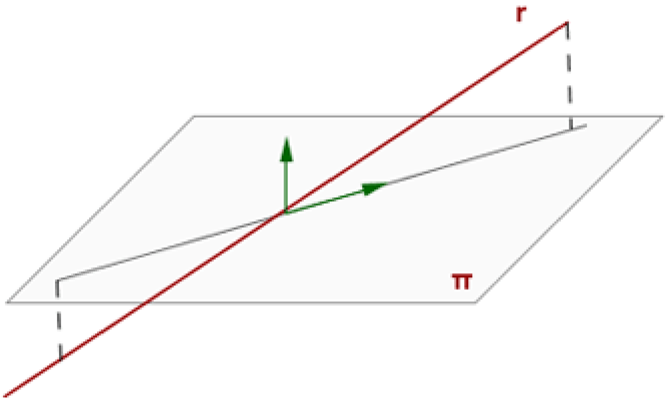
Posición	$\vec{u} \cdot \vec{n}$	A
Recta contenida en el plano	**= 0**	$\in \pi$
Recta y plano paralelos	**= 0**	$\notin \pi$
Recta y plano secantes	$\neq 0$	

Recta contenida en el plano



Recta y plano paralelos





Recta y plano secantes

Ejemplos

Hallar la **posición relativa de la recta y el plano**:

1. $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ $\qquad \pi \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$

En primer lugar se pasan las ecuaciones continuas a **ecuaciones implícitas**.

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

Hallamos el **rango** de la matriz de los coeficientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r = 3$$

Determinamos el rango de la matriz ampliada.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad r' = 3$$

Comparamos los rangos

La recta y el plano se cortan en un punto.

2. $r \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ $\qquad \pi \equiv -x + 3y + 2z + 5 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & - \\ 0 & \\ -1 & \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - 5y = 1 \\ y - z = 2 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r' = 3$$

La recta y el plano son paralelos.

Posiciones relativas de dos planos

Dados los planos:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

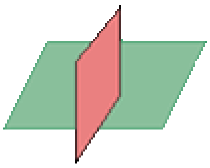
Y sean:

r = rango de la matriz de los coeficientes.

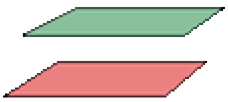
r'= rango de la matriz ampliada.

Las **posicones relativas de dos planos** vienen dada por la siguiente tabla:

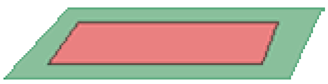
Posición	r	r'	
Secantes	**2**	**2**	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Paralelos	**1**	**2**	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
Coincidentes	**1**	**1**	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$



Secantes



Paralelos



Coincidentes

Ejemplos

1. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\begin{cases} x + y - 5z = -4 \\ 3x - y + 15z = 1 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -1 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r = 2 \qquad r' = 2$$

Como él sistema es compatible indeterminado, **los dos planos son secantes** , es decir, se cortan en la recta:

$$\begin{cases} x + y = -4 + 5z \\ 3x - y = 1 - 15z \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} x + y &= -4 + 5\lambda \\ 3x - y &= 1 - 15\lambda \\ \hline 4x \quad &= -3 - 10\lambda \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -3x - 3y &= 12 - 15\lambda \\ 3x - y &= \quad 1 - 15\lambda \\ \hline -4y &= 13 - 30\lambda \end{array}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{-3 - 10\lambda}{4} \\ y = \dfrac{-13 + 30\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases}$$

2. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0 \\ -3x - 3y + 15z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} \neq \frac{4}{-1}$$

Los dos planos son paralelos.

3. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\begin{cases} x + y - 5z + 4 = 0 \\ -3x - 3y + 15z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} = \frac{4}{-12}$$

Los dos planos son coincidentes.

Posiciones relativas de tres planos

Dados los planos:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

Y sean:

r = rango de la matriz de los coeficientes.

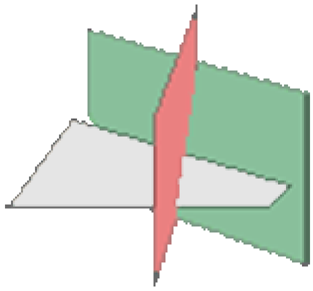
r'= rango de la matriz ampliada.

Las **posicones relativas de los tres planos** vienen dada por la siguiente tabla:

r	**r'**		**Posición**
3	**3**		1. Planos secantes en un punto
2	**3**		2.1 Planos secantes dos a dos.
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	2.2 Dos planos paralelos y el tercero secante.
2	**2**		3.1 Planos secantes y distintos.
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	3.2 Dos planos coincidentes y uno secante.
1	**2**		4.1 Planos paralelos y distintos dos a dos.
		$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	4.2 Planos paralelos y dos coincidentes.
1	**1**		5. Planos coincidentes.

1. Planos secantes en un punto

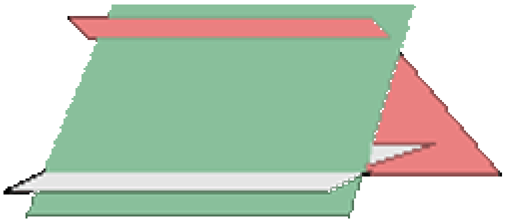
r=3, r'=3



2.1 Planos secantes dos a dos.

r = 2, r' = 3

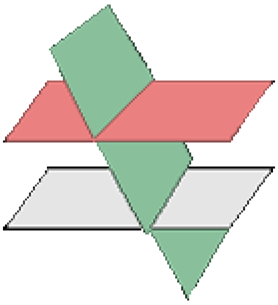
Los tres planos forman una superficie prismática.



2.1 Dos planos paralelos y el tercero secante

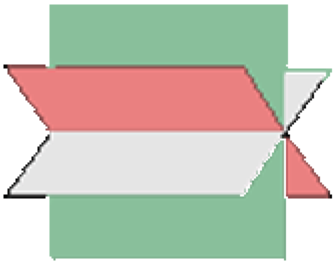
r = 2, r' = 3

Dos filas de la matriz de los coeficientes son proporcionales.



3.1 Planos secantes y distintos

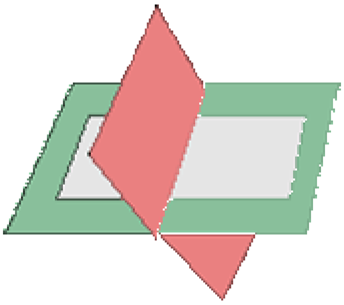
r = 2, r' = 2



3.2 Dos planos coincidentes y uno secante

r = 2, r' = 2

Dos filas de la matriz ampliada son proporcionales.



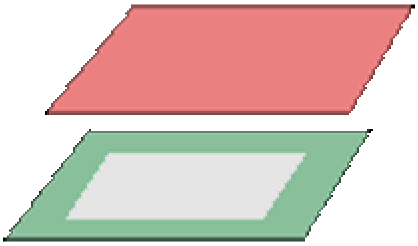
4.1 Planos paralelos y distintos dos a dos

r = 1, r' = 2

4.2 Planos paralelos y dos coincidentes

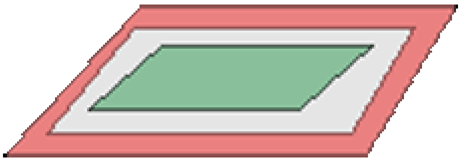
r = 1, r' = 2

Dos filas de la matriz ampliada son proporcionales.



5. Planos coincidentes

r = 1, r' = 1



Ejemplos

Hallar la **posición relativa de los planos**:

1.

$$\pi_1 \equiv x + y - z + 3 = 0$$
$$\pi_2 \equiv -4x + y + 4z - 7 = 0$$
$$\pi_3 \equiv -2x + 3y + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ -4x + y + 4z = 7 \\ -2x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad r = 2$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r' = 3$$

Los tres planos son secantes dos a dos y forman una superficie prismática.

2.

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + 4z - 1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv x - y - z + 1 = 0$$
$$\pi_3 \equiv -x + 2y - z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ -x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r = 3$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad r' = 3$$

Los tres planos se cortan en un punto.

3.

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv x - y + z + 2 = 0$$
$$\pi_3 \equiv 2x - 2y + 2z + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad r = 2$$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad r' = 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$$

El segundo y tercer plano son coincidentes y el primero es secante a ellos, por tanto los tres planos **se cortan en una recta.**

4.
$$\pi_1 \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv -4x + 2y - 4z - 2 = 0$$
$$\pi_3 \equiv 6x - 3y + 6z + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ -4x + 2y - 4z = 2 \\ 6x - 3y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad r = 1$$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad r' = 2$$

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

El primer y segundo plano son coincidentes y el tercero es paralelo a ellos.

Haz de planos

Haz de planos paralelos

Dos planos son paralelos si los coeficientes x, y, z de sus ecuaciones son proporcionales; pero no lo son sus términos independientes.

Todos los planos paralelos a uno dado admiten una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + k = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

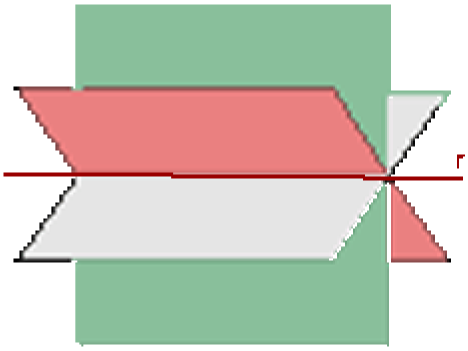
Hallar el plano que pasa por el punto (3, −1, 2) y es paralelo a $\pi \equiv x + 2y - 3z - 5 = 0$.

$$x + 2y - 3z + k = 0 \qquad 3 + 2\cdot(-1) - 3\cdot 2 + k = 0 \qquad k = 5$$

$$x + 2y - 3z + 5 = 0$$

Haz de planos de eje r

Se llama **haz de planos** de **eje r** al conjunto de todos los planos que contienen a la recta r.



Si r viene definida por sus ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

la e**cuación del haz de planos de eje r** nieve dada por la igualdad:

$$\lambda\left(Ax + By + Cz + D\right) + \mu\left(A'\right.$$

Si dividimos por λ y hacemos $k = \frac{\mu}{\lambda}$, la ecuación del haz resulta:

$$\left(Ax + By + Cz + D\right) + k\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0$$

Ejemplo

Hallar en la ecuación del plano que pasa por el punto (3, 2,–3) y pertenece al **haz de planos** de eje en la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 9 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 3y - z - 9 + k\left(-x + 2y + 3z + 2\right) = 0$$

$$6 + 6 + 3 - 9 + k\left(-3 + 4 - 9 + 2\right) = 0 \qquad k = 1$$

$$2x + 3y - z - 9 + \left(-x + 2y + 3z + 2\right) = 0 \qquad x + 5y + 2z - 7 = 0$$