EJERCICIOS RESUELTOS TRIGONOMETRÍA II

Cuestión 1.-

Sabiendo que tg $\alpha = \frac{1}{2}$ siendo $0 < \alpha < 90$ y cos $\beta = -\frac{3}{5}$ siendo $90 < \beta < 180$ calcular:

- **a)** sen 2α
- **b)** tg 2β
- **c)** sen $(\alpha+\beta)$
- **d)** tg $(\beta-\alpha)$
- **e)** tg $\frac{\alpha}{2}$
- **f)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right)$

Solución.

El primer paso es calcular las rezones trigonométricas de α y β que no conocemos.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ siendo } 0 < \alpha < 90 \Rightarrow \alpha \in 1^\circ \text{ Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} + \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante y, de esta el coseno

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2 \alpha : \ \sec \alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = +\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} : \ \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidos los valores del coseno y la tangente se calcula el valor del seno.

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} : \ \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tag}\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ siendo } 90 < \beta < 180 \Rightarrow \ \alpha \in 2^\circ \text{ Cuadrante} : \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} - \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Partiendo del coseno se calcula el seno y, con el seno y el coseno la tangente.

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 : \ \text{sen}\ \beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta} = +\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\text{sen}\ \beta}{\cos\beta} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones trigonométricas de α y β, se resuelven los apartados del ejercicio.

a) $\text{Sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6\sqrt{5}}{25}$

b) $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

c) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4}{5} =$

$$= \frac{-3\sqrt{5}}{25} + \frac{8\sqrt{5}}{25} = \frac{5\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{11}{2}$

e) $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}$

f) $\text{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right) = \text{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \cos 2\alpha - \cos\frac{\beta}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha =$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \cdot \left(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha\right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot \left(\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) - \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{8}{10}} \cdot \frac{15}{25} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{3}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

Cuestión 2.-

Calcular: $\frac{\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$

Solución.

Aplicando las expresiones de transformación de sumas en productos:

$$\text{sen A} + \text{sen B} = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

$$\frac{\text{sen } 105^\circ + \text{sen } 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{2 \text{ sen}\frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}}{-2 \text{ sen}\frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \text{sen}\frac{105^\circ - 15^\circ}{2}} = \frac{2 \text{ sen } 60^\circ \cdot \cos 45^\circ}{-2 \text{ sen } 60^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ} = -\frac{\cos 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = -\frac{1}{\frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ}} =$$

$$= -\frac{1}{\text{tg } 45^\circ} = -\frac{1}{1} = -1$$

<u>Cuestión 3</u>.- ***Demostrar la fórmula:***

$$\cos x = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Sol:

Usamos la fórmula del seno de la suma

$$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=senx\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\cdot sen\frac{\pi}{2}=(senx)\cdot 0+(\cos x)\cdot 1=\boldsymbol{\cos x}$$

<u>Cuestión 4</u>.- ***Expresar tgx en función de*** $tg(\frac{x}{2})$

Sol:

Partimos de la fórmula de la tangente del ángulo doble:

$$tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}$$

En esta fórmula consideramos

$a=\frac{x}{2}$ *(Evidentemente* $2a=\frac{x}{2}\cdot 2=x$ *)*

Sustituyendo en la fórmula anterior se tiene finalmente:

$$\boxed{tgx=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}}$$

<u>Cuestión 5</u>.- ***Comprobar que***

$$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{sen(a-b)+sen(a+b)}=tgb$$

Sol:

Utilizamos, en primer lugar, las fórmulas de conversión de sumas y diferencias en productos:

$$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{sen(a-b)+sen(a+b)}=\frac{-2sen\frac{a-b+(a+b)}{2}sen\frac{a-b-(a+b)}{2}}{2sen\frac{a-b+(a+b)}{2}sen\frac{a-b-(a+b)}{2}}=$$

En este momento podemos utilizar que $\frac{a-b+(a+b)}{2}=\frac{2a}{2}=a$ *y que* $\frac{a-b-(a+b)}{2}=\frac{-2b}{2}=-b$ *con lo que tenemos que la expresión considerada queda de la forma:*

$$= \frac{-2 \cdot sena \cdot sen(-b)}{2 \cdot sena \cdot \cos(-b)} = \frac{-sen(-b)}{\cos(-b)} =$$

(donde, además, hemos simplificado)

Ahora podemos recordar las fórmulas de reducción al primer cuadrante y nuestra expresión queda:

$$= \frac{-sen(-b)}{\cos(-b)} = \frac{-(-senb)}{\cos b} = \boldsymbol{tgb}$$

<u>Cuestión 6</u>.-

Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sol:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} sen\,60^{o} \\ sen\,120^{o} \end{cases}$$

$$x + 45^{o} = 60^{o} \qquad x_1 = 15^{o} + 360^{o}k$$

$$x + 45^{o} = 120^{o} \qquad x_2 = 75^{o} + 360^{o}k$$

<u>Cuestión 7</u>.-

$$3sen^2 x - 5sen\,x + 2 = 0$$

Sol:

$$sen\,x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$sen\ x = 1 \qquad x = 90^{o} + 360^{o}k$$

$$sen\ x = \frac{2}{3} \qquad x = \begin{cases} 41^{o}48'37'' + 360^{o}k \\ 138^{o}11'23'' + 360^{o}k \end{cases}$$

Cuestión 8.-

$$\cos 2x = 1 + 4sen\,x$$

Sol:

$$\cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4sen\,x$$

$$1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 + 4sen\,x$$

$$2sen^2 x + 4sen\,x = 0$$

$$2sen\,x\,(sen\,x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ sen\,x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = arc\,sen\,0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360°k \\ \\ x_2 = 180° + 360°k \end{cases} \qquad x = 0° + 180°k$$

$$x = arc\,sen(-2) \qquad \text{Sin solución}$$

Cuestión 9.-

$$tg\,2x = -tg\,x$$

Sol:

$$\frac{2tg\,x}{1 - tg^2 x} = -tg\,x$$

$$tg\,x\,(tg^2 x - 3) = 0$$

$$tg\,x = 0 \qquad x = 0° + 180°k$$

$$tg\,x = \pm\sqrt{3} \qquad \begin{cases} x = 60° + 180°k \\ x = 120° + 180°k \end{cases}$$

Cuestión 10.-

$$\begin{cases} sen\,x + sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\,x - sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Sol:
Por reducción:

$e_1 + e_2 \qquad 2\,sen\,x = \sqrt{3} \qquad sen\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 120^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

<u>Cuestión 11</u>.-

$$\begin{cases} sen\,x \cdot \cos y + \cos x \cdot sen\,y = 1 \\ sen\,x \cdot \cos y - \cos x \cdot sen\,y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sol:

$$\begin{cases} sen(x+y) = 1 \\ sen(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 30^\circ \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x &= 120^\circ + 360^\circ k \\ x &= 60^\circ + 180^\circ k \\ y &= 30^\circ + 180^\circ k \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 150^\circ \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x &= 240^\circ + 360^\circ k \\ x &= 120^\circ + 180^\circ k \\ y &= -30^\circ + 180^\circ k \end{aligned}$$

<u>Cuestión 12</u>.-

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{senx\,sen2x + 2sen^2 x = 0}$$

Solución:

$$\begin{aligned} &sen\,x \cdot sen2x + 2sen^2\,x = 0 \\ &sen\,x \cdot 2sen\,x\cos x + 2sen^2\,x = 0 \\ &2sen^2\,x\cos x + 2sen^2\,x = 0 \\ &2sen^2\,x(\cos x + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2sen^2\,x = 0 \ \rightarrow \ sen\,x = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \cos x + 1 = 0 \ \rightarrow \ \cos x = -1 \ \rightarrow \ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

Cuestión 13.-

$$2tg\,x - 3\cotg\,x - 1 = 0$$

Sol:

$$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \qquad 2tg^2 x - tg\,x - 3 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$tg\,x = \frac{3}{2} \qquad x = 56°18'35'' + 180°k$$

$$tg\,x = -1 \qquad x = 135° + 180°k$$

Cuestión 14.-

$$\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$$

Sol:

$$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0$$

$$sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = arcsen\,\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$x = arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210° + 360°k \\ x_4 = 330° + 360°k \end{cases}$$

Cuestión 15.-

$$sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Sol:

$$sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \cos^2 x - sen^2 x = -\frac{1}{2} \qquad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120° + 360°k \\ 240° + 360°k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60° + 180°k \\ 120° + 180°k \end{cases}$$

Cuestión 16.-

$$sen2x = \cos 60°$$

Sol:

$$sen2x = \cos 60° \qquad sen\,2x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 30° + 360°k \\ 2x = 150° + 360°k \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 15° + 180°k \\ x = 75° + 180°k \end{matrix}$$

Cuestión 17.-

$$2\cos x = 3tg\,x$$

Sol:

$$2\cos x = \frac{3sen\,x}{\cos x} \qquad 2\cos^2 x = 3sen\,x$$

$$2\left(1-sen^2x\right)=3sen\,x \qquad 2-2sen^2x=3sen\,x$$

$$2sen^2x+3sen\,x-2=0$$

$$sen\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$sen\,x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=30^\circ+360^\circ k\\ x_2=150^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$sen\,x=-2$ Sin solución porque $-1\le sen\,x\le 1$

Cuestión 18.- Comprobar la identidad:

$$sen\,b\cdot\cos(a-b)+\cos b\cdot sen(a-b)=sen\,a$$

Sol:

$$sen\left[b+(a-b)\right]=sen\,a$$

Cuestión 19.- Simplificar las fracciones:

a)

$$\frac{sen\,2x}{1+\cos 2x}$$

Sol:

$$\frac{sen\,2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\,sen\,x\cos x}{1+\cos^2x-sen^2x}=\frac{2\,sen\,x\cos x}{\cos^2x+\cos^2x}=tg\,x$$

b)

$$\frac{sen\,2a}{1-\cos^2a}\cdot\frac{sen\,2a}{\cos a}$$

Sol:

$$\frac{sen\,2a}{1-\cos^2a}\cdot\frac{sen\,2a}{\cos a}=\frac{(2sen\,a\cdot\cos a)^2}{sen^2a\cdot\cos a}=4\cos a$$

c)

$$\frac{sen\,3a-sen\,5a}{\cos 3a+\cos 5a}$$

Sol:

$$\frac{sen\,3a - sen\,5a}{\cos 3a + \cos 5a} = \frac{2\cos 4a \cdot sen(-a)}{2\cos 4a \cdot \cos(-a)} = -tg\,a$$

<u>Cuestión 20</u>.- Resuelve:

$$\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$$

Sol:

$$y = 90^\circ - x$$

$$sen\,x + sen\,(90^\circ - x) = 1$$

$$2sen\frac{x + (90^\circ - x)}{2}\cos\frac{x - (90^\circ - x)}{2} = 1$$

$$2sen\,45^\circ \cdot \cos(x - 45^\circ) = 1 \qquad \cos(x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x - 45^\circ = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ k & \Rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k \qquad y = 0^\circ + 360^\circ k \\ -45^\circ + 360^\circ k & \Rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k \qquad y = 90^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

<u>Cuestión 21</u>.-

Calcular todas las soluciones a las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(2x) = -1/2$

b) $\tan x = 1$

c) $\cos(2x) = \cos x$

d) $\sin(2x) = \cos x$

e) $\sin(2x+60) = \sin(x-60)$

f) $\cos(2x) = \cos(x+90)$

g) $\sin^2 x + \cos(2x) = 1/4$

h) $\sin^2 x + \cos^2 x = 2 - \cos^2 x$

i) $\tan^2 x + 2 = 3\tan x$

j) $\cos^2 x = \sin^2 x$

k) $\sin(2x-15) = \cos(x+15)$

l) $\sin x \cos x = 1/2$

ll) $2\sin^2 x = \tan x$

m) $\tan x \sec x = \sqrt{2}$

n) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1/2$

Sol:

a) $x = 105 + 180k$

b) $x = 45 + 180k$

c) $x = 120k$

d) $x = 30 + 120k$

e) $x = 60 + 120k$

f) $x = 90 + 360k$

g) $x = 60 + 180k$, $x = 120 + 180k$

h) $x = 180k$

i) $x = 45 + 180k$

j) $x = 45 + 90k$

k) $x = 30 + 120k$, $x = 330 + 360k$

l) $x = 45 + 180k$

ll) $x = 45 + 180k$, $x = 180k$

m) $x = -45 + 360k$, $x = -135 + 360k$

n) $x = 60 + 180k$, $x = -60 + 180k$

<u>Cuestión 22</u>.-

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos(x)\tan(x) = \sqrt{3}/2 \\ \sin(x+y) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sin(x)\sin(y) = 1/4 \\ \cos(x)\cos(y) = 3/4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \sin^2 y - \cos^2 x = 1/2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \sin x + \sin y = 3/2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ 2x + 2y = 120^\circ \end{cases}$

h) $\begin{cases} \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \tan(2x) = \operatorname{cotan} y \\ \tan x = \operatorname{cotan}(2y) \end{cases}$

j) $\begin{cases} \sin x \cos y = 3/4 \\ \cos x \sin y = 1/4 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+\sin^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} \cos x+\cos y=1 \\ \cos(x+y)=1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \sin(x+y)=1 \\ \sin(x-y)=1/2 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x=\cos y \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} \arcsin(x+y)=\pi \\ \arccos(x-y)=\pi \end{cases}$

o) $\begin{cases} x+y=\pi/3 \\ \cos x-\sin y=0.5 \end{cases}$

Soluciones particulares:

a) $x=y=30;\ x=y=150$

b) $x=60, y=30$; $x=120, y=-30$

c) $x=y=30$; $x=y=-30$

$x=y=210$; $x=y=150$

d) $x=\pm 60, y=\pm 60$; $x=\pm 60, y=\pm 120$

e) $x=30, y=90;\ x=90, y=30;$

f) $x=60, y=30$

g) $x=30, y=30$

h) $x=90, y=90k$

i) $x=y=\pm 30;\ x=y=\pm 210$

j) $x=60, y=30;\ x=-60, y=60$

k) $x=1, y=90$; $x=1, y=270$

l) $x=60, y=-60$; $x=-60, y=60$

m) $x=60, y=30;\ x=120, y=-30$

n) $x=135, y=45$

ñ) $x=y=0$

o) $x=60, y=0;$

Todas las soluciones posibles:

a) $x=30+360k+360t \quad y=30+360t$

$x=150+360k+360t \quad y=150+360t$

b) $x=60+360t \quad y=30+360k+360t$

$x=120+360t \quad y=-30+360k+360t$

c) $x=\pm 30+360k+360t \quad y=\pm 30+360t$

$x=210+360k+360t \quad y=210+360t$

$x=150+360k+360t \quad y=150+360t$

d) $x=\pm 60+180k \quad y=\pm 60+360t$

$x=\pm 60+180k \quad y=\pm 120+360t$

e) $x=30-360k \quad y=90+360k$

$x=90-360k \quad y=30+360k$

f) $x=60+90k \quad y=30+90k$

g) $x=30+360k \quad y=30-360k$

h) $x=90+90k+90t \quad y=90k-90t$

i) $x=y=\pm 30+360k$

$x=y=\pm 210+360k$

j) $x=60+180(k+t) \quad y=30+180(k-t)$

$x=120+180(k+t),\ y=-30+180(k-t)$

k) $x=1,\ y=90+180k$

l) $x=60+360t \quad y=-60+360k-360t$

$x=-60+360t \quad y=60+360k-360t$

m) $x=60+180(k+t) \quad y=30+180(k-t)$

$x=120+180(k+t) \quad y=-30+180(k-t)$

n) $x=135-180k \quad y=45+180k$

ñ) $x=y=0$

o) $x=60-360k \quad y=360k$

Cuestión 23.-

$$4\,\text{sen}^2 x \tan x - 4\,\text{sen}^2 x - 3\tan x + 3 = 0,$$

$\Rightarrow \quad (4\,\text{sen}^2 x \tan x - 4\,\text{sen}^2 x) - (3\tan x - 3) = 0 \qquad \{\text{asociando convenientemente}\},$

$\Rightarrow \quad 4\,\text{sen}^2 x(\tan x - 1) - 3(\tan x - 1) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\},$

$\Rightarrow \quad (\tan x - 1)(4\,\text{sen}^2 x - 3) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\};$

$\therefore \quad \tan x - 1 = 0 \text{ ó bien } 4\,\text{sen}^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ ó bien } \text{sen}\, x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$\therefore \quad x = 45°, \text{ ó } x = 225°; \text{ ó bien } x = 60°, \text{ ó } x = 120°$

$$\text{Solución: } x = \begin{cases} 45° + k360° \\ 60° + k360° \\ 120° + k360° \\ 225° + k360° \\ 240° + k360° \\ 300° + k360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cuestión 24.-

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\cos^2 x = 1$ (**S:** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **)**

b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ (**S:** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **)**

c) $3\text{tg}\, x + 2\cot x = 3$ **(S: Incompatible)**

d) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{1}{2}$ **(S: Igual que b))**

e) $\text{sen}\, x - \text{sen}\, 2x = 0$ (**S:** $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **)**

f) $\text{sen}\, 2x \cos x = \text{sen}\, x$ (**S:** $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$**)**

g) $\cos 2x = 1 + 4\text{sen}\, x$ (**S:** $0, \pi$ **)**

h) $\text{sen}^2 x + \cos x = 1$ (**S:** $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ **)**

i) $\text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 4x = 0$ (**S:** $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi, \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}$**)**

j) $3\text{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$ (**S:** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **)**

k) $2\text{tg}^2 x + \sec^2 x = 2$ (**S:** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **)**

l) $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2 = 0$ (**S:** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$**)**

m) $3\cos^2 x = \text{sen}^2 x$ (**S:** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **)**

n) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ (**S:** $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$ **)**

o) $\text{sen}\, x + \cos x = 1$ (**S:** $0, \frac{\pi}{2}$ **)**