

RESUMEN TEÓRICO TRIGONOMETRÍA II

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \text{sen } 45^\circ \text{sen } 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{tg } 15^\circ = \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = 2 \operatorname{sen} 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen}(22^\circ 30') = \operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ 30') = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22^\circ 30') = \operatorname{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = -1 + \sqrt{2}$$

Transformaciones de sumas en productos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\cos 40^\circ - \cos 20^\circ = -2 \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 10^\circ$$

Transformaciones de productos en sumas

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

Ejemplos de aplicación:

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x)$$

Ecuaciones trigonométricas

Son las ecuaciones en las que la incógnita está afectada por una función trigonométrica. Como éstas son periódicas, habrá por lo general infinitas soluciones.

Ejemplos de ecuaciones trigonométricas

a) $\text{sen } x = 0$

El seno es nulo en el eje de abscisas y tiene de período 360° .

$$x = \text{arcsen } 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ k & x_1 = 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ k & x_2 = 180^\circ, 540^\circ, 900^\circ, \dots \end{cases}$$

solución: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

b) $\text{cos } x = 0$

El coseno es nulo en el eje ordenadas y tiene de período 360° .

$$x = \text{arccos } 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k & x_1 = 90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \dots \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k & x_2 = 270^\circ, 630^\circ, 990^\circ, \dots \end{cases}$$

soluciones: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

c) $\text{tg } x = 0$

La tangente es nula en el eje de abscisas y tiene de período 180° .

$$x = \text{arctg } 0$$

$$x = 0^\circ + 180^\circ k$$

d) $\text{sen } x = 1$

$$x = \text{arcsen } 1$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

e) $\text{cos } x = 1$

$$x = \text{arc cos } 1$$

$$x = 0^\circ + 360^\circ k$$

$$f) \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 \qquad x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$g) \quad \operatorname{sen} x = -1$$

$$x = \operatorname{arcsen}(-1) \qquad x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$h) \quad \cos x = -1$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \operatorname{arccos}(-1) \qquad f \circ f^{-1} = x$$

$$x = \operatorname{arccos}(-1) \qquad x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$i) \quad \operatorname{tg} x = -1$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1) \qquad x = 135^\circ + 180^\circ k$$

$$j) \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

El seno es positivo en el 1^{er} y 2^o cuadrante.

$$x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$k) \quad \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad f \circ f^{-1} = x$$

El seno es negativo en el 2^o y 4^o cuadrante.

$$x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 210^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

l)

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

El coseno es negativo en el 2^o y 3^{er} cuadrante.

$$x = \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

