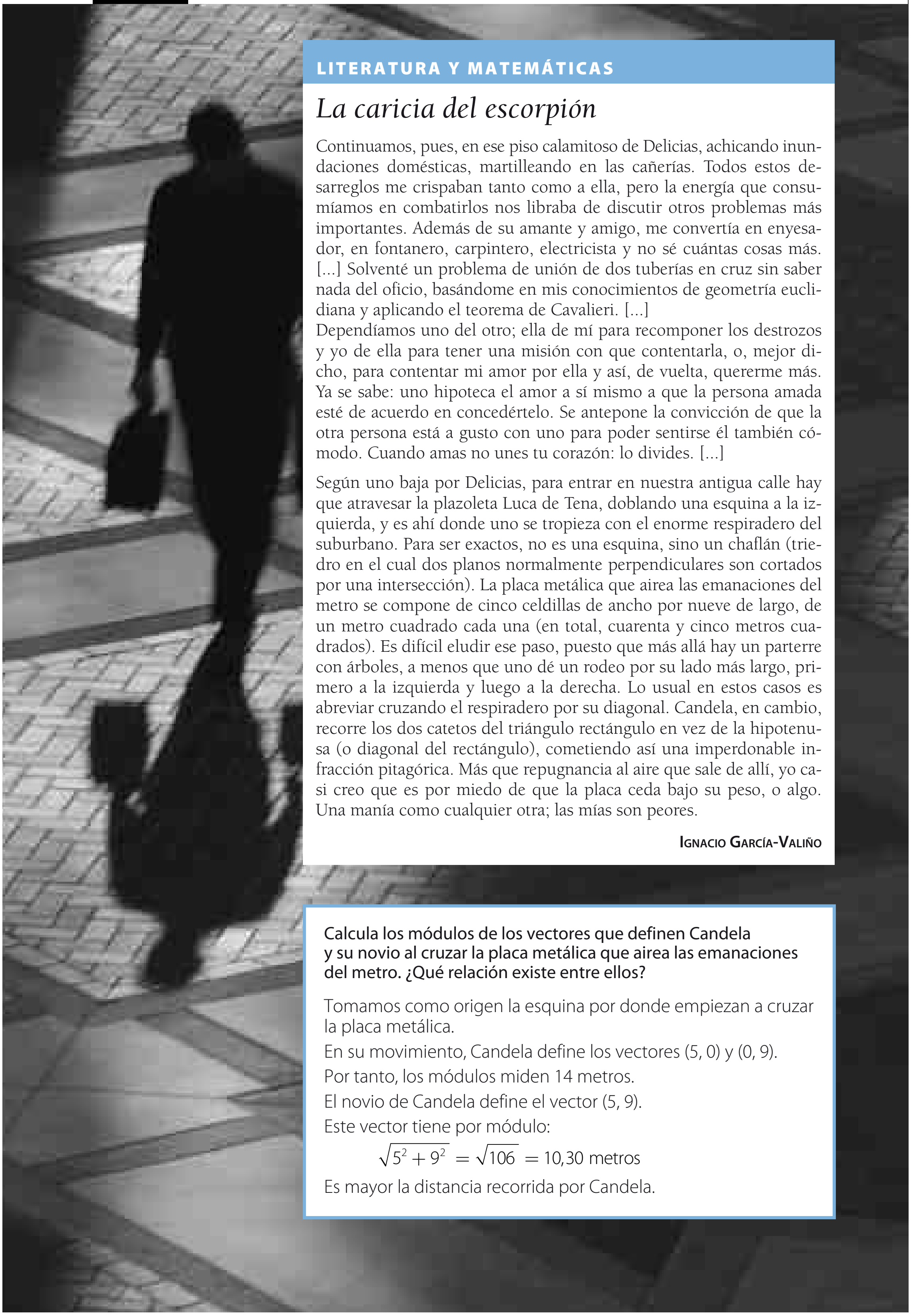
# 5 Geometría analítica



## LITERATURA Y MATEMÁTICAS

### *La caricia del escorpión*

Continuamos, pues, en ese piso calamitoso de Delicias, achicando inundaciones domésticas, martilleando en las cañerías. Todos estos desarreglos me crispaban tanto como a ella, pero la energía que consumíamos en combatirlos nos libraba de discutir otros problemas más importantes. Además de su amante y amigo, me convertía en enyesador, en fontanero, carpintero, electricista y no sé cuántas cosas más. [...] Solventé un problema de unión de dos tuberías en cruz sin saber nada del oficio, basándome en mis conocimientos de geometría euclidiana y aplicando el teorema de Cavalieri. [...]
Dependíamos uno del otro; ella de mí para recomponer los destrozos y yo de ella para tener una misión con que contentarla, o, mejor dicho, para contentar mi amor por ella y así, de vuelta, quererme más. Ya se sabe: uno hipoteca el amor a sí mismo a que la persona amada esté de acuerdo en concedértelo. Se antepone la convicción de que la otra persona está a gusto con uno para poder sentirse él también cómodo. Cuando amas no unes tu corazón: lo divides. [...]

Según uno baja por Delicias, para entrar en nuestra antigua calle hay que atravesar la plazoleta Luca de Tena, doblando una esquina a la izquierda, y es ahí donde uno se tropieza con el enorme respiradero del suburbano. Para ser exactos, no es una esquina, sino un chaflán (triedro en el cual dos planos normalmente perpendiculares son cortados por una intersección). La placa metálica que airea las emanaciones del metro se compone de cinco celdillas de ancho por nueve de largo, de un metro cuadrado cada una (en total, cuarenta y cinco metros cuadrados). Es difícil eludir ese paso, puesto que más allá hay un parterre con árboles, a menos que uno dé un rodeo por su lado más largo, primero a la izquierda y luego a la derecha. Lo usual en estos casos es abreviar cruzando el respiradero por su diagonal. Candela, en cambio, recorre los dos catetos del triángulo rectángulo en vez de la hipotenusa (o diagonal del rectángulo), cometiendo así una imperdonable infracción pitagórica. Más que repugnancia al aire que sale de allí, yo casi creo que es por miedo de que la placa ceda bajo su peso, o algo. Una manía como cualquier otra; las mías son peores.

IGNACIO GARCÍA-VALIÑO

**Calcula los módulos de los vectores que definen Candela y su novio al cruzar la placa metálica que airea las emanaciones del metro. ¿Qué relación existe entre ellos?**

Tomamos como origen la esquina por donde empiezan a cruzar la placa metálica.

En su movimiento, Candela define los vectores (5, 0) y (0, 9).

Por tanto, los módulos miden 14 metros.

El novio de Candela define el vector (5, 9).

Este vector tiene por módulo:

$$\sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} = 10{,}30 \text{ metros}$$

Es mayor la distancia recorrida por Candela.

## ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

**001** **Pon varios ejemplos de magnitudes escalares y vectoriales.**

Son magnitudes escalares: la capacidad, el volumen, la superficie…

Son magnitudes vectoriales: el peso, la aceleración…

**002** **Representa estas rectas.**

a) $y = -2x$

b) $y = \dfrac{x}{2}$

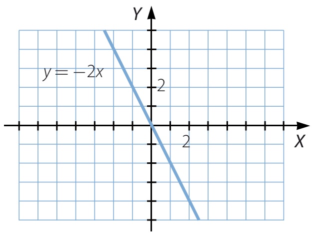
c) $y = -x + 1$

d) $y = \dfrac{-x - 1}{2}$

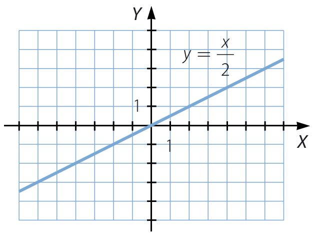
e) $y = 2x - 2$

f) $y = \dfrac{x}{2} - 1$

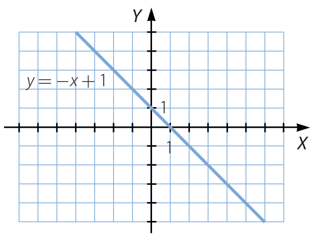
a)



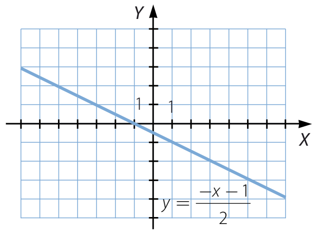

b)



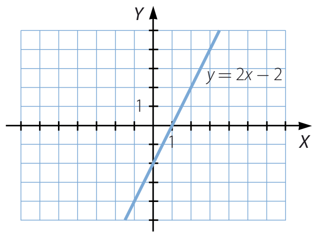

c)



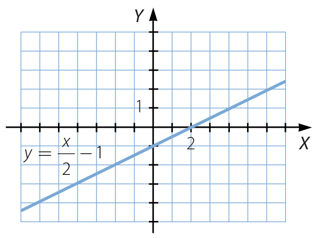

d)



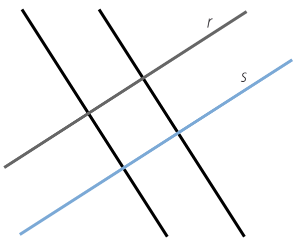

e)




f)

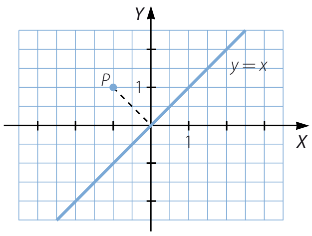



**003** **Dibuja dos rectas paralelas, *r* y *s*. Después, traza una perpendicular a la recta *r* y otra a la recta *s*. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?**



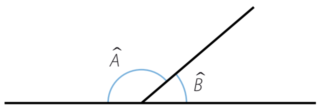

Las rectas son paralelas.

004 Representa, en un sistema de ejes cartesianos, el punto $P(-1, 1)$ y la recta $y = x$, y determina la proyección ortogonal del punto sobre la recta.




La proyección ortogonal de $P$ sobre $r$ es el origen.

005 Observa los siguientes ángulos y contesta.



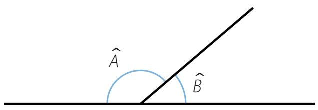

a) ¿Cuánto suman los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$?

b) Dibuja en tu cuaderno un ángulo igual a $\hat{A}$ y otro igual a $\hat{B}$.

c) ¿Qué condiciones cumplen los ángulos que has dibujado?

a) Los ángulos suman 180°.

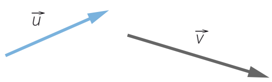
b)



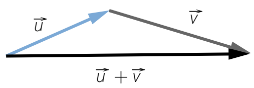

c) Son ángulos suplementarios.

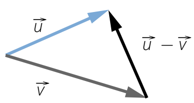
## ACTIVIDADES

001 Copia estos vectores y calcula gráficamente su suma y su diferencia.

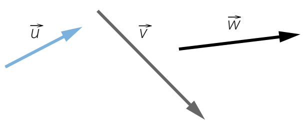



$\vec{u} + \vec{v}$ $\quad$ $\vec{u} - \vec{v}$



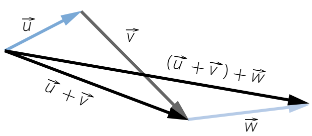

002 Realiza las siguientes sumas de vectores.



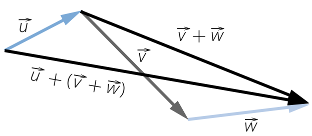

a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

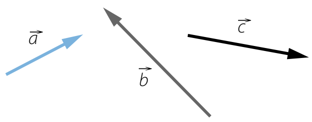
a)




b)



003 Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.

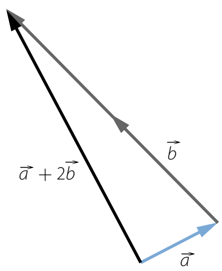



a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

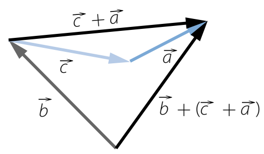
b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$

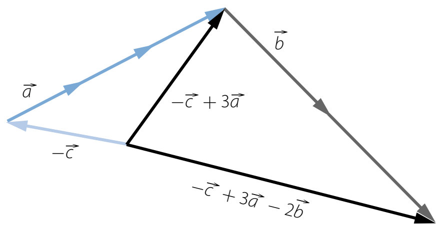
a)




c)

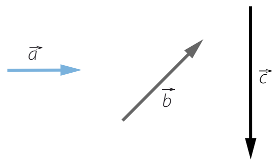


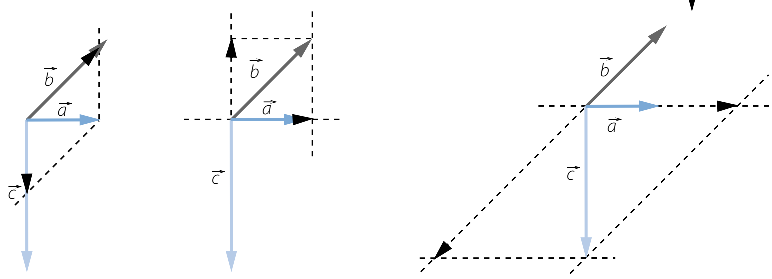

b)



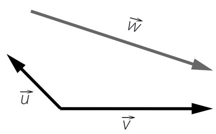

004 Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Expresa $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{c}$, y también $\vec{c}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

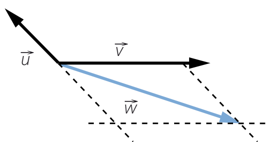


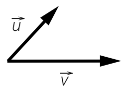

005 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base, y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.




Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.



**006** Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:




a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

b) Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.

c) Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

a)

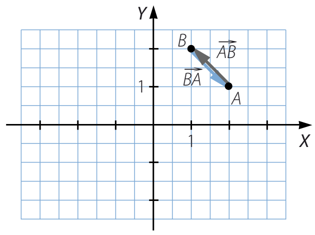

b) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.

c) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$

**007** Dibuja los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, 2)$ y calcula.

a) Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

b) Sus módulos.




a) $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, 2 - 1) = (-1, 1)$

$\overrightarrow{BA} = (2 - 1, 1 - 2) = (1, -1)$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

**008** Encuentra cuáles son vectores paralelos.

$\vec{a} = (2, 1)$ $\quad \vec{b} = (-2, -1)$ $\quad \vec{c} = (-2, 1)$ $\quad \vec{d} = (2, -1)$ $\quad \vec{e} = (4, 2)$ $\quad \vec{f} = (-6, 3)$

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ son paralelos, porque: $\dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} = \dfrac{4}{2}$

Los vectores $\vec{c}$, $\vec{d}$ y $\vec{f}$ son paralelos, porque: $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{-6}{3}$

**009** Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ y $D(-3, 4)$, halla los vectores.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ c) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA}$

a) $(2 - 0, 1 - 3) - (-3 - (-2), 4 - 2) = (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4)$

b) $(-2 - 0, 2 - 3) + (-2 - (-3), 2 - 4) = (-2, -1) + (1, -2) = (-1, -3)$

c) $(-3 - 2, 4 - 1) - (0 - (-2), 3 - 2) = (-5, 3) - (2, 1) = (-7, 2)$

**010** Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, realiza las siguientes operaciones de vectores.

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$ $\qquad$ b) $5\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

a) $\vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - (0, -9) = (2, 8)$

b) $5\vec{u} + \vec{v} = (10, -5) + (0, 3) = (10, -2)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 1) + (0, 6) = (-2, 7)$

**011** Sean los vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$. Calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) + (0, -1)) = (0, 2) \cdot (1, -2) = -4$

c) $\vec{w} \cdot \vec{v} = (0, -1) \cdot (1, -1) = 1$

d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (0, -1) = -2$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) - (0, -2)) = (0, 2) \cdot (1, 1) = 2$

f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v} = (0, -4) \cdot (3, -3) = 12$

**012** El producto escalar de dos vectores coincide con el producto de sus módulos. ¿Qué puedes decir de los vectores?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

Para que el producto escalar de dos vectores coincida con el producto de sus módulos, tiene que verificarse que $\cos\alpha = 1$. Por tanto, los vectores deben tener igual dirección y sentido.

**013** Halla el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (4, -6)$. ¿Qué deduces del resultado?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2) \cdot (4, -6) = 12 - 12 = 0$. El producto de vectores no nulos puede ser cero.

**014** Calcula el ángulo que forman estos vectores expresados en coordenadas.

a) $\vec{u} = (1, -3)$ $\vec{v} = (2, 3)$ b) $\vec{u} = (-1, 2)$ $\vec{v} = (4, 3)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -0{,}61 \to \alpha = 127°\ 52'\ 29{,}9''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = 0{,}18 \to \alpha = 79°\ 41'\ 42{,}55''$

**015** Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a los siguientes vectores.

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$ d) $\vec{d} = (1, -5)$

Respuesta abierta.

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)

Vectores perpendiculares: (−1, 1), (−2, 2) y (−3, 3)

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)

Vectores perpendiculares: (2, −3), (4, −6) y (6, −9)

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

d) $\vec{d} = (1, -5)$

Vectores paralelos: (2, −10), (3, −15) y (4, −20)

Vectores perpendiculares: (5, 1), (10, 2) y (15, 3)

**016** **Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.**

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

El perímetro mide:

$$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36 \text{ u}$$

**017** **Dados $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$, halla el punto medio de $AB$ y los simétricos de $A$ respecto de $B$ y de $B$ respecto de $A$.**

Llamamos $M$ al punto medio de $A$ y $B$.

$$M = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de $A$ respecto de $B$.

$$(1, -2) = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) \rightarrow (x, y) = (4, -7)$$

Llamamos $B'(x', y')$ al punto simétrico de $B$ respecto de $A$.

$$(-2, 3) = \left(\frac{1+x'}{2}, \frac{-2+y'}{2}\right) \rightarrow (x', y') = (-5, 8)$$

**018** **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.**

$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

**019** **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

**020** **Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.**

Bisectriz del primer cuadrante.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$$

Bisectriz del segundo cuadrante.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -t \end{array}\right\}$$

**021** **Dos rectas, *r* y *s*, ¿pueden tener el mismo vector director? ¿Qué relación habrá entre ellas?**

Dos rectas pueden tener el mismo vector director. Cuando dos rectas tienen el mismo vector director, son paralelas o coincidentes.

**022** **Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$. Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.**

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto $P$ cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto $P$ no pertenece a la recta.

**023** **Obtén la ecuación general de la recta que pasa por $A(1, -1)$ y $B(0, 2)$. Calcula también un vector perpendicular a su vector director.**

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$

Obtenemos la ecuación general:

$A = 3 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -2$

$3x + y - 2 = 0$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(-3, -1)$.

**024** **Halla las ecuaciones explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por $A(3, -3)$ y por el origen de coordenadas.**

Calculamos la ecuación explícita de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{A(3,-3)} -3 = m \cdot 3 + n \\ y = mx + n \xrightarrow{O(0,0)} 0 = m \cdot 0 + n \end{array}\right\} \rightarrow y = -x$$

Para determinar la ecuación punto-pendiente hallamos un vector director:

$\overrightarrow{OA} = (3, -3)$

Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{-3}{3} = -1$$

Tomamos el punto $O(0, 0)$:

$y - 0 = -1(x - 0)$

**025** **Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.**

Calculamos la pendiente: $tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

**026** **Halla los valores de $B$ y $C$ para que las rectas $r$ y $s$ sean paralelas.**

$$r\colon\ 3x + By + 5 = 0 \qquad s\colon\ x + 2y + C = 0$$

Para que las rectas sean paralelas se tiene que cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{B}{2} \rightarrow B = 6 \qquad \frac{3}{1} \neq \frac{5}{C} \rightarrow C \neq \frac{5}{3}$$

**027** **Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?**

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta $r$, y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta $s$.

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$$

028 **Halla la distancia entre el punto $P(2, -1)$ y la recta $r$, cuya ecuación es:**

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ u$$

029 **Calcula la distancia que separa esta recta del origen de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ u$$

030 **Halla la distancia entre estas rectas.**

$$r\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\}$$

Calculamos el vector director de la recta $r$: $\vec{u_r} = (2, 5)$

Hallamos el vector director de la recta $s$: $\vec{u_s} = (2, 5)$

Tomamos un punto de la recta $r$, $A(0, 1)$, y vemos si pertenece a $s$:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} 0 = 2t \\ 1 = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-2}{5} \end{array}\right\} \rightarrow A \notin s$$

Expresamos la recta, s, en forma general:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x - 2y + 6 = 0$$

Las rectas son paralelas, y calculamos la distancia de $A$ a $s$:

$$d(A, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}\ u$$

031 **Calcula el ángulo que forman las rectas.**

$$r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\rightarrow \alpha = 71°\ 33'\ 54{,}18''$$

032

A la vista de la siguiente figura, realiza las operaciones indicadas.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{DC}$

e) $\overrightarrow{HG} + 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{CB}$

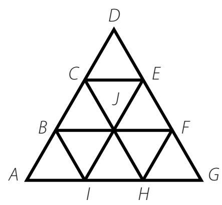
f) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC}$

g) $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{IE}$

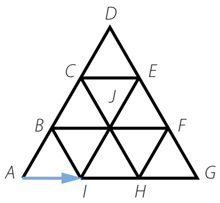
h) $2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{CD}$

i) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$

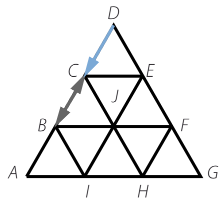
j) $2\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{BC}$



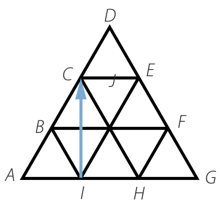

a)



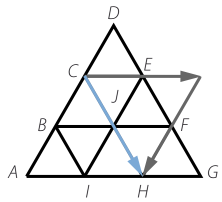
f)



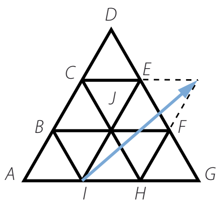
b)



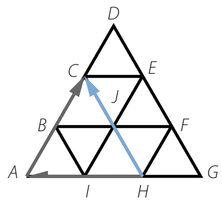
g)



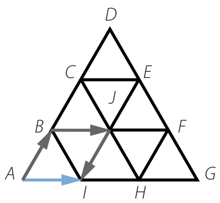
c)



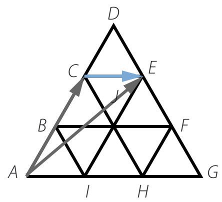
h)



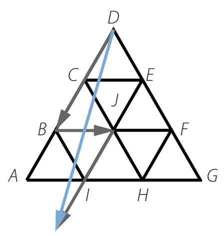
d)



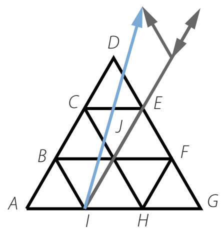
i)



e)

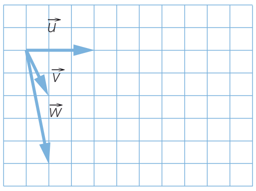


j)

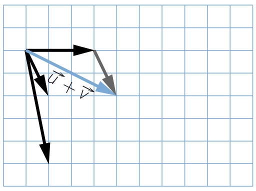


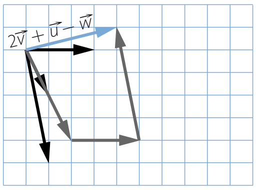
033

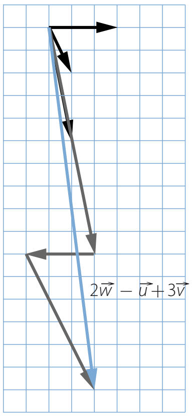
Haz las siguientes operaciones.

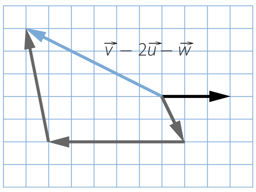


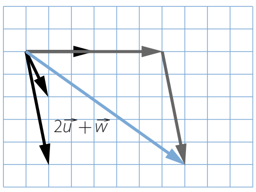

a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $2\vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$
c) $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$
d) $\vec{v} - 2\vec{u} - \vec{w}$
e) $2\vec{u} + \vec{w}$

a) 

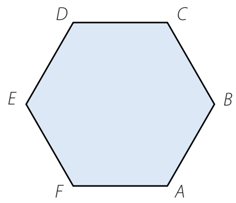

b) 


c) 


d) 

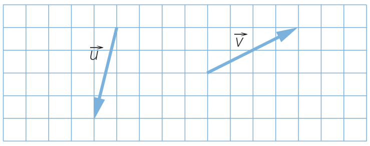

e) 

034 Expresa los vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{FC}$ de la figura como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.




$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{AB}$$

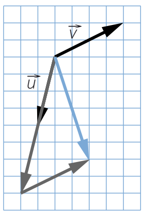
035 Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura forman una base.

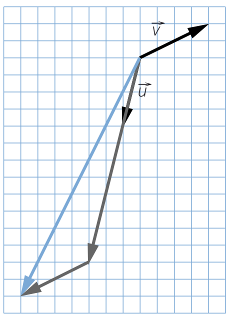


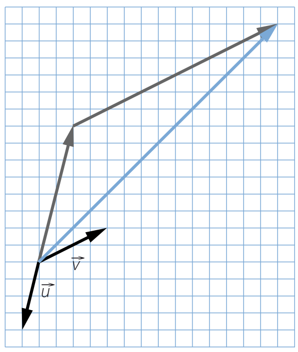

Dibuja los vectores con coordenadas en esa base.

a) (2, 1) b) (3, –1) c) (–2, 3)

Como los vectores tienen distinta dirección, forman una base.

a)



b)



c)



036 Razona qué pares de vectores forman una base.

a) $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$ b) $\vec{u} = (0, -2)$ y $\vec{v} = (4, 1)$

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, puesto que no son proporcionales.

$$(2, -3) = t(5, 4) \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{5} \\ t = \dfrac{-3}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No son proporcionales.}$$

b) De forma análoga, tenemos que:

$$(0, -2) = t(4, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No son proporcionales.}$$

**037** Si, respecto de una base, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (5, 4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores

a) $2\vec{u} + \vec{v}$
b) $5\vec{u} + 2\vec{v}$
c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$
d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
e) $-3\vec{u} - \vec{v}$
f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = (4, -6) + (5, 4) = (9, -2)$

b) $5\vec{u} + 2\vec{v} = (10, -15) + (10, 8) = (20, -7)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 3) + (10, 8) = (8, 11)$

d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (4, -6) + (2{,}5; 2) = (6{,}5; -4)$

e) $-3\vec{u} - \vec{v} = (-6, 9) + (-5, -4) = (-11, 5)$

f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = \left(-1, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{25}{6}\right)$

**038** Calcula $\lambda$ y $\mu$ para que los vectores $\vec{u} = (5, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (13, 11)$ verifiquen que: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{w}$.

$\lambda(5, 1) + \mu(-1, 4) = (13, 11)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\lambda - \mu = 13 \\ \lambda + 4\mu = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda = 11 - 4\mu} 5(11 - 4\mu) - \mu = 13 \rightarrow \mu = 2 \rightarrow \lambda = 3$$

**039** Halla el módulo de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ y $2\vec{b} - \vec{c}$, dados $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (-5, -12)$ y $\vec{c} = (3, -1)$.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\vec{a} + \vec{b} = (-8, -8)$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$2\vec{b} - \vec{c} = (-10, -24) + (-3, 1) = (-13, -23)$

$|2\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(-13)^2 + (-23)^2} = \sqrt{698}$

**040** Si $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v}$
c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$
d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 1) \cdot (2, -1) = 6 - 1 = 5$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v} = (3, 1) \cdot (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = ((6, 2) + (6, -3)) \cdot (2, -1) = (12, -1) \cdot (2, -1) = 24 + 1 = 25$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (3, 1) \cdot ((3, 1) + (-2, 1)) = (3, 1) \cdot (1, 2) = 3 + 2 = 5$

**041** Dados los puntos $A(3, 7)$, $B(4, 9)$, $C(-4, 3)$ y $D(4, 9)$, ¿son paralelos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$?

$\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

$\overrightarrow{CD} = (8, 6)$

No son paralelos, porque: $\frac{8}{1} \neq \frac{6}{2}$

042 Calcula el valor de $t$ para que $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$, si $\vec{u}=(-1, 2)$ y $\vec{v}=(3, t)$. Halla el módulo de los dos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=7$

$(-1, 2)\cdot(3, t)=7 \rightarrow -3+2t=7 \rightarrow t=5$

$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

043 Si $\vec{u}=(a, b)$, $\vec{v}=(c, d)$ y $\vec{w}=(e, f)$, prueba que se verifican las igualdades.

a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}$

a) $\vec{u}+\vec{v}=(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)=(c+a, d+b)=(c, d)+(a, b)=\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(a, b)\cdot((c, d)+(e, f))=(a, b)\cdot(c+e, d+f)=ac+ae+bd+bf$

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=(a, b)\cdot(c, d)+(a, b)\cdot(e, f)=ac+bd+ae+bf$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=((a, b)+(c, d))\cdot((a, b)+(c, d))=$

$=(a+c, b+d)\cdot(a+c, b+d)=a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd$

$\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}=(a, b)\cdot(a, b)+(2a, 2b)\cdot(c, d)+(c, d)\cdot(c, d)=$

$=a^2+b^2+2ac+2bd+c^2+d^2$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=((a, b)+(c, d))\cdot((a, b)-(c, d))=$

$=(a+c, b+d)\cdot(a-c, b-d)=a^2-c^2+b^2-d^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=(a, b)\cdot(a, b)-(c, d)\cdot(c, d)=a^2+b^2-c^2-d^2$

044 Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos.

a) $\vec{a}=(-2, 4)$ y $\vec{b}=(3, 2)$

b) $\vec{c}=(4, -3)$ y $\vec{d}=(6, 8)$

a) $\dfrac{-2}{3}\neq\dfrac{4}{2}$

No son paralelos.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2, 4)\cdot(3, 2)=-6+8\neq 0$

No son perpendiculares.

b) $\dfrac{4}{6}\neq\dfrac{-3}{8}$

No son paralelos.

$\vec{c}\cdot\vec{d}=(4, -3)\cdot(6, 8)=24-24=0$

Son perpendiculares.

045 Encuentra un vector $\vec{u}=(a, b)$ que es perpendicular a $\vec{v}=(3, 5)$ y cuyo módulo sea $|\vec{u}|=2\sqrt{34}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a, b)\cdot(3, 5)=3a+5b=0 \rightarrow a=-\dfrac{5b}{3}$

$|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\dfrac{5b}{3}\right)^2+b^2}=2\sqrt{34} \rightarrow \dfrac{25b^2}{9}+b^2=136 \rightarrow 34b^2=1.224 \rightarrow b=\sqrt{36}=\pm 6$

Si $b=6 \rightarrow a=-10$ Si $b=-6 \rightarrow a=10$

046 Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$

$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7-3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$

Si $a = -\dfrac{4}{5} \rightarrow b = \dfrac{47}{5}$

Si $a = 5 \rightarrow b = -8$

047 Halla $m$ y $n$ para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 4$

Si $m = 4$:

$(3, 4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \dfrac{4}{3}$

Si $m = -4$:

$(3, -4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n + 4 = 0 \rightarrow n = -\dfrac{4}{3}$

048 Calcula $m$ para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:

a) Sean perpendiculares.
b) Sean paralelos.
c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, 2) \cdot (m, 6) = 7m + 12 = 0 \rightarrow m = -\dfrac{12}{7}$

b) $\dfrac{7}{m} = \dfrac{-2}{6} \rightarrow m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \rightarrow m = \sqrt{17}$

049 Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de $m$ para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$
$\rightarrow m = \pm\sqrt{10}$

La solución no es única.

**050** ¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, siendo $\vec{b} = (2, 1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 5 \rightarrow 2a + b = 5$
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 6) = 0 \rightarrow 2a + 6b = 0$

Resolvemos el sistema:
$a = 3, b = -1$

**051** Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

Tomamos el punto *A* como origen, por lo que obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 1)$
$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (1, 1), \overrightarrow{DB} = (1, -1)$
$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 - 1 = 0$

c) $\overrightarrow{AD} = (0, 1), \overrightarrow{CB} = (0, -1)$
$(0, 1) \cdot (0, -1) = -1$

d) $\overrightarrow{AC} = (1, 1), \overrightarrow{CB} = (0, -1)$
$(1, 1) \cdot (0, -1) = -1$

**052** Por una traslación, el punto (1, −3) se transforma en (3, 7). ¿Cuál es la imagen del punto (−2, 5) por la misma traslación? ¿Y la imagen de (4, −6)?

Calculamos el vector de la traslación:
$A(1, -3), B(3, 7)$
$\overrightarrow{AB} = (2, 10)$

Hallamos la imagen de (−2, 5):
$(-2, 5) + (2, 10) = (0, 15)$

Determinamos la imagen de (4, −6):
$(4, -6) + (2, 10) = (6, 4)$

**053** Halla el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{a} = (-1, 5)$ y $\vec{b} = (3, 2)$
b) $\vec{c} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{d} = \left(-1, \sqrt{3}\right)$
c) $\vec{e} = (-6, 4)$ y $\vec{f} = (-9, 6)$
d) $\vec{g} = (2, -5)$ y $\vec{h} = (4, 6)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = 0{,}38 \rightarrow \alpha = 67^\circ\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \dfrac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 60^\circ$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{f}|} = \dfrac{78}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{117}} = 1 \rightarrow \alpha = 0°$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{g}\cdot\vec{h}}{|\vec{g}|\cdot|\vec{h}|} = \dfrac{-22}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{52}} = -0{,}56 \rightarrow \alpha = 124°\ 30'\ 30{,}6''$

**054** Calcula $m$ para que los vectores $\vec{a} = (8, -6)$ y $\vec{b} = (m, 3)$ formen un ángulo de 60°.

$$\cos 60° = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10+\sqrt{m^2+9}} \rightarrow \sqrt{m^2+9} = 16m-46$$

$$\rightarrow 255m^2 - 1.472m + 2.107 = 0 \rightarrow m = \frac{736}{255} \pm \frac{\sqrt{4.411}}{255}$$

**055** Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\cdot|\vec{b}|$.

$$\cos 30° = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a-4b}{5\sqrt{3}+5} \rightarrow 15+5\sqrt{3} = 6a-8b$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow a^2+b^2 = 75$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6a-8b = 15+5\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 75 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}} \left(\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}\right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)b + 75\sqrt{3} - 1.200 = 0$$

$$\rightarrow b = -\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{5} \pm \sqrt{\frac{1.296-27\sqrt{3}}{50}}$$

**056** Calcula $a$ y $b$, si los vectores $\vec{u} = (a, 4)$ y $\vec{v} = (b, 14)$ forman un ángulo de 45° y $|\vec{u}| = 5$.

$$\cos 45° = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ab+56}{5+\sqrt{b^2+196}} \rightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{2b^2+392} = 2ab+112$$

$$\sqrt{a^2+16} = 5$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5\sqrt{2}+\sqrt{2b^2+392} = 2ab+112 \\ \sqrt{a^2+16} = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\pm 3} \left\{\begin{array}{l} b_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}\left(56\sqrt{2}-5\right)}{17} + \sqrt{\dfrac{9.629-560\sqrt{2}}{289}} \\ b_2 = \dfrac{3\sqrt{2}\left(56\sqrt{2}-5\right)}{17} - \sqrt{\dfrac{9.629-560\sqrt{2}}{289}} \end{array}\right.$$

057 Halla el punto medio de los segmentos de extremos:

a) $A(3, 5)$ y $B(9, 11)$
b) $A(-3, 1)$ y $B(7, -4)$
c) $A(4, 5)$ y $B(7, 1)$
d) $A(-6, -1)$ y $B(-9, -3)$

Llamamos $M$ al punto medio de $A$ y $B$.

a) $M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{5+11}{2}\right) = (6, 8)$

b) $M = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1-4}{2}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

c) $M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$

d) $M = \left(\frac{-6-9}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = \left(-\frac{15}{2}, -2\right)$

058 Si el punto medio del segmento $AB$ es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto $B$. Luego obtén $A$ con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = \frac{9+x}{2} \\ 5 = \frac{7+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = \frac{4+x}{2} \\ 5 = \frac{-9+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = 19 \end{array}\right\}$$

059 Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(-4, 2)$ respecto del punto $Q(5, -1)$. Determina también el punto simétrico de $A(3, -2)$ respecto de $B(-3, 4)$.

Como $P(-4, 2)$ es el punto medio de $Q(5, -1)$ y $Q'(x, y)$:

$$(-4, 2) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 = \frac{5+x}{2} \\ 2 = \frac{-1+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -13 \\ y = 5 \end{array}\right\}$$

Y como $B(-3, 4)$ es el punto medio de $A(3, -2)$ y $A'(x, y)$:

$$(-3, 4) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 = \frac{3+x}{2} \\ 4 = \frac{-2+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -9 \\ y = 10 \end{array}\right\}$$

**060** Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?

Calculamos el punto medio del segmento $AC$:

$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

El cuarto vértice, $D(x, y)$, es simétrico de $B$ respecto de $M$.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{7+x}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 \end{array}\right\}$$

**061** Dos vértices consecutivos de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas son $(4, 0)$ y $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$. Calcula las coordenadas de los demás vértices.

Calculamos los vértices $A'(a, b)$ y $B'(c, d)$, que son simétricos de $A$ y $B$ respecto de $O$.

$$(0, 0) = (4 + a, 0 + b) \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 0 \end{array}\right\} \qquad (0, 0) = \left(2 + a, 2\sqrt{3} + b\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

El vértice $C$ se obtiene con una traslación con origen en $B$ y vector $(-4, 0)$:

$$C = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-4,0) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$$

El vértice $C'$ se obtiene con una traslación con origen en $B'$ y vector $(4, 0)$:

$$C' = \left(-2, -2\sqrt{3}\right) + (4, 0) = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$$

**062** Tres vértices consecutivos de un hexágono regular son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $\left(3, \sqrt{3}\right)$. Halla los otros vértices.

Sabemos que $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C\left(3, \sqrt{3}\right)$.

Calculamos el vértice $D$, con una traslación con origen en $C$ y vector guía $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$$D = \left(3, \sqrt{3}\right) + \left(-1, \sqrt{3}\right) = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$$

Hallamos el vértice $E$, con una traslación con origen en $D$ y vector guía $(-2, 0)$:

$$E = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-2, 0) = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$$

Determinamos el vértice $F$, con una traslación con origen en $E$ y vector guía $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$:

$$F = \left(0, 2\sqrt{3}\right) + \left(-1, -\sqrt{3}\right) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$$

**063** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos del segmento, y el segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12, 9) = (9, 2)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12, 9) = (13, 5)$$

**064** **Determina el valor de $a$, sabiendo que la distancia entre $Q(-6, 2)$ y $P(a, 7)$ es 13. Escribe también las coordenadas y el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.**

$$\sqrt{(-6-a)^2+(2-7)^2}=13 \rightarrow \sqrt{36+12a+a^2+25}=13$$
$$\rightarrow a^2+12a-108=0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=-18 \\ a_2=6 \end{array}\right\}$$

Calculamos las dos soluciones:

$\overrightarrow{PQ}=(-12, -5)$

$\overrightarrow{PQ}=(12, -5)$

$|\overrightarrow{PQ}|=13$

**065** **Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.**

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB}=(6, -2)$, $\overrightarrow{BC}=(-4, -4)$ y $\overrightarrow{AC}=(2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}\ u$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}\ u$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\ u$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, $AB$ y $AC$, es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, $h$, sobre el lado $BC$ aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\sqrt{40}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2}=\sqrt{40-8}=\sqrt{32}\ u$$

$$A=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}{2}=16\ u^2$$

**066** **Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.**

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB}=(8, 6)$, $\overrightarrow{BC}=(-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{64+36}=10\ u$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20\ u$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+484}=\sqrt{500}\ u$

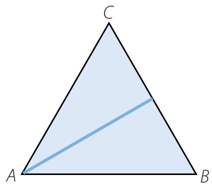
Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2$

$10^2+20^2=500$

Luego el triángulo es rectángulo.

**067** Halla la longitud de la mediana que parte de $A$ en el triángulo de vértices $A(-1, 4)$, $B(6, 5)$ y $C(10, -3)$. ¿Coincide la mediana con la altura en este caso? Justifícalo.




Calculamos el punto medio, $M$, del segmento $CB$:

$$M = \left(\frac{6+10}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (8, 1)$$

Para hallar la longitud de la mediana, determinamos el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (9, -3)$  $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

Para que la mediana, $AM$, coincida con la altura sobre el lado $CB$, los lados $AC$ y $AB$ deben ser iguales.

$\overrightarrow{AC} = (11, -7)$  $\overrightarrow{AB} = (7, 1)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170}$  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Luego la mediana no coincide con la altura.

**068** Halla los vértices de un cuadrado si dos de esos vértices no consecutivos son (3, 1) y (9, −7).

$A(3, 1)$, $C(9, -7)$, $B(a, b)$ y $D(c, d)$

Calculamos la longitud de la diagonal formada por los vértices dados:

$|D| = \sqrt{(9-3)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{36+64} = 10$ u

Hallamos la longitud de los lados, $l$: $100 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{50}$

La longitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$ debe ser igual a la longitud del lado.

$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 2b + 1$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-9)^2 + (b+7)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 18a + 81 + b^2 + 14b + 49$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-9)^2 + (d+7)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 18c + 81 + d^2 + 14d + 49$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-3)^2 + (d-1)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 6c + 9 + d^2 - 2d + 1$$

Resolvemos el sistema: $B(2, -6)$ y $D(10, 0)$

**069** Los vértices de un triángulo son (−7, 3), (1, 1) y (−1, −5). Halla los puntos medios de sus lados. Comprueba que el triángulo que determinan tiene los lados paralelos al primero y que la medida de sus lados es la mitad.

Calculamos el punto medio, $C'$, del lado $AB$, siendo $A(-7, 3)$ y $B(1, 1)$: $C' = (-3, 2)$

Hallamos el punto medio, $B'$, del lado $AC$, siendo $A(-7, 3)$ y $C(-1, -5)$: $B' = (-4, -1)$

Determinamos el punto medio, $A'$, del lado $CB$, siendo $B(1, 1)$ y $C(-1, -5)$: $A' = (0, -2)$

Calculamos los vectores formados por los vértices de los triángulos:

$\overrightarrow{AB} = (8, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (6, -8)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2, -6)$

$\overrightarrow{A'B'} = (-4, 1)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-3, 4)$ y $\overrightarrow{B'C'} = (1, 3)$

Como las coordenadas son proporcionales, los lados son paralelos.

Determinamos la longitud de los lados:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$  $|\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+64} = 10$  $|\overrightarrow{A'C'}| = \sqrt{9+16} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$  $|\overrightarrow{B'C'}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

**070** **Dados los puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$, obtén un punto $C$ sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resultan.**

Los vectores formados por los vértices deben tener la misma longitud.

Si $C(0, c)$:

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9 + c^2}$ $\quad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9 + c^2}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = 6$

$6 = \sqrt{9 + c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$

Los puntos pedidos son: $C_1\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ y $C_2\left(0, -3\sqrt{3}\right)$

Calculamos el área de los triángulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

**071** **¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$? Con este resultado demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.**

$\vec{u} = (a, b)$ $\quad \vec{v} = (c, d)$

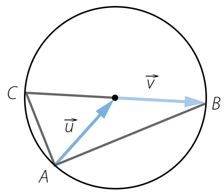
$$(a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = 0 \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales. Por tanto, si las diagonales son perpendiculares, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

**072** **El lado mayor de este triángulo es un diámetro de la circunferencia.**

**Expresa el vector $\overrightarrow{AC}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.**

**Realiza el producto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ y simplifica todo lo posible. ¿Qué resultado obtienes?**




$\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$

Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales, ya que son radios de la circunferencia.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$$

**073** **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que cumplen estas condiciones.**

**a) Pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 3)$.**

**b) Pasa por el punto $P(3, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-2, 7)$.**

**c) Su ecuación explícita es $y = -3x + 4$.**

a) Calculamos el vector director: $(8, 2)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (5, 3) + t(8, 2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 5 + 8t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned}\right\}$

b) Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, 4)$ y $B(1, 1)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 1) + t(1, -3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\}$

074

**Expresa la ecuación continua de la recta que:**

**a) Pasa por los puntos (8, 3) y (1, 5).**

**b) Pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, -4)$.**

**c) Su ecuación general es $-2x + y + 7 = 0$.**

a) Calculamos el vector director: $(-7, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x - 8}{-7} = \dfrac{y - 3}{2}$

b) Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 5}{-4}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, -7)$ y $B(1, -5)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 7}{2}$

075

**Escribe la ecuación explícita de la recta que:**

**a) Pasa por los puntos (−3, 5) y (3, −1).**

**b) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.**

**c) Su ecuación continua es $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - 3}{5}$.**

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,\,5)} 5 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3,\,-1)} -1 = 3m + n \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $m = -1$ y $n = 2 \rightarrow y = -x + 2$

b) Calculamos la pendiente: $m = \dfrac{2}{3}$

El punto $P(-1, 0)$ debe cumplir la ecuación de la recta.

$y = \dfrac{2}{3}x + n \rightarrow 0 = -\dfrac{2}{3} + n \rightarrow n = \dfrac{2}{3}$

Por tanto, la ecuación explícita de la recta es:

$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - 3}{5} \rightarrow 5x = -2y + 6 \rightarrow y = -\dfrac{5}{2}x + 3$

**076** Comprueba si los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -1)$ están en las rectas.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{array}\right\}$ b) $y = \dfrac{5x - 3}{3}$ c) $5x - 2y + 19 = 0$ d) $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+7}{2}$

a) $\left.\begin{array}{l} -3 = 3 - 2\lambda \\ 2 = 3 + 4\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = \dfrac{-1}{4} \end{array}\right\}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\left.\begin{array}{l} 5 = 3 - 2\lambda \\ -1 = 3 + 4\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}\right\}$

El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

b) $2 \neq \dfrac{-15 - 3}{3}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$-1 \neq \dfrac{25 - 3}{3}$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

c) $-15 - 4 + 19 = 0$

El punto $(-3, 2)$ pertenece a la recta.

$25 + 2 + 19 \neq 0$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

d) $\dfrac{-3+4}{3} \neq \dfrac{2+7}{2}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\dfrac{5+4}{3} = \dfrac{-1+7}{2} \to$ El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

**077** Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.

a) Vector director de la recta: $(2, -4)$

Ecuación vectorial $\to (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\to \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\to \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: $(2, 5)$

Ecuación vectorial $\to (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\to \left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\to \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{5}$

078 Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto (0, −1) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-1}$ y pasa por el punto (5, −2).

a) Vector director de la recta: (3, 0)
Pendiente: $m = 0$
$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$
Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: (4, −1)
Pendiente: $m = -\dfrac{1}{4}$
$-2 = -\dfrac{5}{4} + n \rightarrow n = -\dfrac{3}{4}$
Ecuación explícita $\rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$

079 Escribe la ecuación general de la recta que:

a) Pasa por el punto (10, −2) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $y = \dfrac{8x-3}{2}$ y pasa por el punto (4, 0).

a) Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-10}{-3} = \dfrac{y+2}{-2}$
Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: (1, 4)
Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{4}$
Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

080 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta.

a) Pasa por el punto (0, −3) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{4}$.

b) Pasa por el punto (−5, 0) y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a (−3, 4) es (4, 3).
Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$
Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:
$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$
Un vector perpendicular a (−2, 3) es (−3, −2)
Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$
Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

**081** Determina la ecuación continua de la recta que cumple estas condiciones.

a) Pasa por el punto (7, −1) y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{-x+6}{3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 4) y es perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta:
$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$
Un vector perpendicular a $(3, -1)$ es $(1, 3)$.
Expresamos la recta en forma continua:
$$\frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{3}$$

b) Calculamos el vector director de la recta:
$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$
Un vector perpendicular a $(1, 2)$ es $(-2, 1)$.
Expresamos la recta en forma continua:
$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-4}{1}$$

**082** Halla la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por el punto (2, −5) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 8) y es perpendicular a la recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, 2)$
La pendiente de la recta es $m = \dfrac{2}{3}$.
Como pasa por el punto $(2, -5)$:
$$-5 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\frac{19}{3}$$
La ecuación de la recta es $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{19}{3}$.

b) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (-2, 3)$
La pendiente de la recta es $m = -\dfrac{3}{2}$.
Como pasa por el punto $(-4, 8)$:
$$8 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + n \rightarrow n = 2$$
La ecuación de la recta es $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$.

**083** Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos (−1, −10) y (2, *c*), sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \dfrac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$
$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$$

Y la expresamos en forma general:

$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$

**084** Determina el punto de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$, que dista 2 unidades del punto $P(-2, 2)$.

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma:

$A_r(1 + 2t, -1 - t)$

Calculamos los vectores que van de la recta al punto $P$:

$\overrightarrow{A_rP} = (-3 - 2t, 3 + t)$

Veamos cuáles de estos vectores tienen módulo 2.

$$2 = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3+t)^2} \rightarrow 4 = 9 + 12t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2$$

$$\rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-9-\sqrt{11}}{5} \\ t_2 = \dfrac{-9+\sqrt{11}}{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, los puntos son:

$$A_1\left(1 + \frac{-18-2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9+\sqrt{11}}{5}\right) \qquad A_2\left(1 + \frac{-18+2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9-\sqrt{11}}{5}\right)$$

**085** Estudia la posición relativa que tienen estas rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\mu \\ y = 7 - 2\mu \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 6\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\mu \\ y = -\mu \end{array}\right\}$

a) $\vec{u}_r = (-4, -2)$

$\vec{u}_s = (3, -2)$

Como los vectores no son proporcionales, las rectas son secantes.

b) $\vec{u}_r = (-6, 2)$

$\vec{u}_s = (3, -1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(1, -3)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{array}\right\}$$

Las rectas son paralelas.

**086** Decide qué posición relativa tienen las rectas.

a) $r$: $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-2}$ $\qquad$ $s$: $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+3}{1}$

b) $r$: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}$ $\qquad$ $s$: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{-3}$

a) $\vec{u}_r=(6,-2)$ $\qquad$ $\vec{u}_s=(-3,1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(2,-1)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$$\frac{2+1}{-3}\neq\frac{-1+3}{1}$$

Las rectas son paralelas.

b) $\vec{u}_r=(2,-3)$ $\qquad$ $\vec{u}_s=(2,-3)$

Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1,2)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$$\frac{-1+1}{2}\neq\frac{-2+3}{-3}$$

Las rectas son paralelas.

**087** Investiga qué posición relativa tienen los siguientes pares de rectas.

a) $r$: $3x-5y+9=0$ $\qquad$ $s$: $x+4y-3=0$

b) $r$: $6x-4y+11=0$ $\qquad$ $s$: $-9x+6y-1=0$

c) $r$: $4x-y+1=0$ $\qquad$ $s$: $2x-3y+13=0$

a) $\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{-5}{4}\rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\dfrac{-9}{6}=\dfrac{6}{-4}\neq\dfrac{-1}{11}\rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\dfrac{4}{2}\neq\dfrac{-1}{-3}\rightarrow$ Las rectas son secantes.

**088** Discute la posición relativa de estas rectas.

a) $r$: $y=\dfrac{6x-1}{4}$ $\qquad$ $s$: $y=\dfrac{-3x+5}{-2}$

b) $r$: $y=\dfrac{6x+18}{9}$ $\qquad$ $s$: $y=\dfrac{4x+12}{6}$

a) La pendiente de la recta $r$ es: $m_r=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

La pendiente de la recta $s$ es: $m_s=\dfrac{3}{2}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(1,-1)$, de la recta $s$, pertenece a la recta $r$.

$-1\neq\dfrac{6-1}{4}\rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) La pendiente de la recta $r$ es: $m_r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

La pendiente de la recta $s$ es: $m_s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(0, 2)$, de la recta $s$, pertenece a la recta $r$.

$2 = \frac{6 \cdot 0 + 18}{9} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

**089** **¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?**

**a)** $r$: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{array}\right\}$ $s$: $x + 2y - 7 = 0$

**b)** $r$: $y = \frac{5x + 1}{-2}$ $s$: $\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 7}{-5}$

a) Expresamos la recta $r$ en forma general:

$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$

Las rectas son paralelas.

b) Expresamos las rectas en forma general:

$r$: $-2y = 5x + 1$
$5x + 2y + 1 = 0$

$s$: $-5x - 15 = 2y - 14$
$5x + 2y + 1 = 0$

Las rectas son coincidentes.

**090** **¿Qué posición relativa mantienen los siguientes pares de rectas?**

**a)** $r$ **pasa por (−3, 4) y por (8, −1).**
$s$: $x - 2y + 15 = 0$

**b)** $r$ **pasa por (−1, 4) y por (2, −5).**
$s$: $\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 7}{3}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,4)} 4 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(8,-1)} -1 = 8m + n \end{array}\right\}$

$y = -\frac{5}{11}x + \frac{29}{11} \rightarrow 5x + 11y - 29 = 0 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\vec{u}_r = (3, -9)$

$\vec{u}_s = (-1, 3)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 4)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$\frac{-1 + 2}{-1} = \frac{4 - 7}{3} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

**091** ¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?

a) $r$ es perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$. $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = -6\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{array}\right\}$

b) $r$ es una recta perpendicular a $y = \dfrac{2x+3}{-5}$. $\quad s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5}$

a) Calculamos el vector director de la recta:

$m = \dfrac{3}{4} \rightarrow (4, 3)$

Este vector es perpendicular al vector director de la recta $s$.

$\vec{u}_r = (4, 3) \qquad \vec{u}_s = (-6, 8)$

Las rectas $r$ y $s$ son perpendiculares.

b) Calculamos el vector director de la recta:

$m = \dfrac{-2}{5} \rightarrow (5, -2)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta $r$.

$\vec{u}_r = (5, -2) \qquad \vec{u}_s = (2, 5)$

Las rectas $r$ y $s$ son perpendiculares.

**092** Determina la ecuación de la recta $r$, que es perpendicular a $s$: $3x - 2y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(0, 2)$.

Hallamos el vector director de la recta: $m = \dfrac{3}{2} \rightarrow (2, 3)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta $r$.

$\vec{u}_r = (-3, 2)$

$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

**093** Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.

a) $r$: $2x - y + 8 = 0 \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{array}\right\}$

b) $r$: $y = \dfrac{-2x+7}{3} \qquad s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$

c) $r$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-6} \qquad s: 3x + y + 2 = 0$

d) $r$: $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+7}{-4}$

e) $r$: $y = \dfrac{6x+3}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} + 3\lambda \end{array}\right\}$

a) $2(2 + 3\lambda) - (7 + \lambda) + 8 = 0 \rightarrow 4 + 6\lambda - 7 - \lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

El punto de corte es $P(-1, 6)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3y = -2x + 7 \\ -2x + 4 = 3y - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 3y = -7 \end{array}\right\}$

Hay infinitos puntos de corte, y las rectas son coincidentes.

c) $\left.\begin{array}{l}-6x+6=2y+6\\3x+y+2=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}-6x-2y=0\\3x+y=-2\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}3x+y=0\\3x+y=-2\end{array}\right\}$

No hay puntos de corte, y las rectas son paralelas.

d) $\dfrac{-1-3\lambda-3}{1}=\dfrac{5+8\lambda+7}{-4} \rightarrow 12\lambda+16=8\lambda+12 \rightarrow \lambda=-1$

El punto de corte es $P(2, -3)$.

e) $\dfrac{3}{2}+3\lambda=\dfrac{6+6\lambda+3}{2} \rightarrow 3+6\lambda=6\lambda+9$

No tiene solución, las rectas son paralelas.

**094** Halla el valor que debe tomar $k$ para que la recta $\dfrac{x+1}{k}=\dfrac{y-2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l}x=3-\lambda\\y=2+5\lambda\end{array}\right\}$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{k}{-1}=\dfrac{3}{5} \rightarrow k=-\dfrac{3}{5}$

**095** Encuentra el valor de $a$ para que la recta $ax+3y-7=0$ sea paralela a $\dfrac{x-1}{5}=y+2$.

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{-3}{5}=\dfrac{a}{1} \rightarrow a=-\dfrac{3}{5}$

**096** ¿Para qué valores de $m$ son estas rectas perpendiculares?

$r\colon\ y=mx+6 \qquad s\colon\ 8x-5y+1=0$

$\vec{u}_r=(5, 8)$

Cualquier vector perpendicular es proporcional a $(-8, 5)$.

Por tanto, la pendiente es: $m=-\dfrac{5}{8}$

**097** Prueba que todas las rectas cuya ecuación es del tipo $y=ax+a$ pasan por el mismo punto. Halla el punto y la recta de ese tipo que es paralela a: $\left.\begin{array}{l}x=21-3\lambda\\y=-1+2\lambda\end{array}\right\}$.

Hallamos el punto de corte:

$\left.\begin{array}{l}y=ax+a\\y=bx+b\end{array}\right\} \rightarrow ax+a=bx+b \rightarrow (a-b)x=-(a-b) \rightarrow x=-1 \rightarrow y=0$

Todas las rectas pasan por $(-1, 0)$.

Como la recta es paralela a la recta dada, su vector director es $(-3, 2)$.

$m=-\dfrac{2}{3}$

La recta es: $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

**098** Calcula la perpendicular trazada desde el punto *P* a la recta *r*.

a) $r\colon\ 2x - 5y + 9 = 0$ $\qquad P(4, -14)$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad P(4, -5)$

c) $r\colon\ y = \dfrac{3x - 2}{5}$ $\qquad P(2, -4)$

a) $\vec{u}_r = (5, 2)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(-2, 5)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 - 2\lambda \\ y = -14 + 5\lambda \end{array}\right\}$$

b) $\vec{u}_r = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(3, 2)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

c) $\vec{u}_r = (5, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ es $(-3, 5)$.

Calculamos la perpendicular:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -4 + 5\lambda \end{array}\right\}$$

**099** Determina la recta paralela a *r* que pasa por el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

a) $r\colon\ 2x - 3y + 10 = 0$ $\qquad P(4, -7)$

b) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array}\right\}$ $\qquad P(4, 4)$

c) $r\colon\ y = \dfrac{3x - 1}{4}$ $\qquad P(5, -9)$

a) Calculamos la recta *s*, perpendicular a *r*, y que pasa por *P*:

$$s\colon\ \frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 7}{3}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

$(-2, 2)$ es el punto medio de *P* y su simétrico, *P'*, respecto de *r*.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-2, 2) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{-7 + y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -8 \\ y = 11 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -8 + 3\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \end{array}\right\}$

b) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$$s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{-2}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\frac{-2\lambda - 4}{1} = \frac{2-\lambda-4}{-2} \rightarrow \lambda = 2$$

$(-4, 0)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-12 \\ y=-4 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x=-12-2\lambda \\ y=-4-\lambda \end{array}\right\}$

c) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$$s: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+9}{4}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right\}$$

$(-1, -1)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-7 \\ y=7 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x=-7+4\lambda \\ y=7+3\lambda \end{array}\right\}$

**100** **Encuentra la ecuación de la recta simétrica de $r$ respecto de la recta $s$.**

a) $r$: $y = \dfrac{x-4}{2}$  $s$: $-x + 2y + 4 = 0$  b) $r$: $\left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3+2\lambda \end{array}\right\}$  $s$: $2x + y - 7 = 0$

a) $\vec{u}_r = (2, 1), \vec{u}_s = (2, 1)$

Las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, $P$, de $r$ y calculamos la distancia hasta $s$:

$$P(4, 0) \qquad d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-4+2\cdot 0+4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 0$$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

b) $\vec{u}_r = (-1, 2), \vec{u}_s = (1, -2)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, $P$, de $r$ y calculamos la distancia hasta $s$:

$$P(2, 3) \qquad d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 2+1\cdot 3-7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 0$$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

101 Determina el ángulo que forman las rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2-3\lambda \\ y = -1-2\lambda \end{array}\right\}$ $s: \left.\begin{array}{l} x = 2\mu \\ y = 5+3\mu \end{array}\right\}$

b) $r: y = 3x+2$ $s: y = \dfrac{4x+1}{-2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{6}$ $s: \dfrac{2x+3}{-1} = \dfrac{y}{2}$

d) $r: 20x-4y+1=0$ $s: -15x+3y+7=0$

a) $\vec{u_r} = (3, 2), \vec{u_s} = (2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{3^2+2^2} \cdot \sqrt{2^2+3^2}} = \frac{12}{13}$$

$\alpha = 22^\circ\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\vec{u_r} = (1, 3), \vec{u_s} = (-4, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|1 \cdot (-4) + 3 \cdot 8|}{\sqrt{1^2+3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+8^2}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45^\circ$

c) $\vec{u_r} = (2, 6), \vec{u_s} = (-1, 2)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|2 \cdot (-1) + 6 \cdot 2|}{\sqrt{2^2+6^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45^\circ$

d) $\vec{u_r} = (4, 20), \vec{u_s} = (3, 15)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 3 + 20 \cdot 15|}{\sqrt{4^2+20^2} \cdot \sqrt{3^2+15^2}} = \frac{312}{312} = 1$$

$\alpha = 0^\circ$

102 ¿Qué ángulo forman las rectas?

a) $r: y = \dfrac{-6x-4}{3}$ $s: -4x+2y-1=0$

b) $r: x+1 = \dfrac{y-5}{2}$ $s: y = \dfrac{9x-8}{3}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3+\lambda \end{array}\right\}$ $s: 2x+2y-1=0$

d) $r: y = \dfrac{6x+1}{-3}$ $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3}$

e) $r: 3x-y-3=0$ $s: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-4}$

f) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3 \end{array}\right\}$ $s: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+6}{6}$

a) $\vec{u}_r = (3, -6), \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-6) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53° \, 7' \, 48{,}37''$

b) $\vec{u}_r = (1, 2), \vec{u}_s = (3, 9)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{21}{\sqrt{450}} =$$

$$= \frac{21}{15\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$\alpha = 8° \, 7' \, 48{,}37''$

c) $\vec{u}_r = (1, 1), \vec{u}_s = (2, -2)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 0$$

$\alpha = 90°$

d) $\vec{u}_r = (-3, 6), \vec{u}_s = (2, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|-3 \cdot 2 + 6 \cdot 3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{585}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

$\alpha = 60° \, 15' \, 18{,}43''$

e) $\vec{u}_r = (1, 3), \vec{u}_s = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha = 45°$

f) $\vec{u}_r = (-1, 0), \vec{u}_s = (3, 6)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|(-1) \cdot 3 + 0 \cdot 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\alpha = 63° \, 26' \, 5{,}82''$

103 Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$ y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

$\overrightarrow{PQ} = (4, 4), \vec{u}_r = (2, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2.176}}$$

$\alpha = 30° \, 57' \, 49{,}52''$

104 Obtén la medida de los ángulos que forman las parejas de rectas.

a) $r: y = \dfrac{4x-3}{2}$ y $s$ es la recta que pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r: x + 3 = \dfrac{y}{2}$ y $s$ es la recta que pasa por $(3, 8)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+9}{4}$.

c) $r: 8x - 2y - 3 = 0$ y $s$ es perpendicular a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 6 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}$ y pasa por $(3, -2)$.

a) $\vec{u}_r = (2, 4), \vec{u}_s = (2, -4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$\alpha = 53° \, 7' \, 48''$

b) $\vec{u}_r = (1, 2), \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$\alpha = 0° \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\vec{u}_r = (2, 8)$

El vector $\vec{u}_s$ debe ser perpendicular a $(-1, 3)$; por tanto, puede ser $\vec{u}_s = (3, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 8 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha = 57° \, 31' \, 43{,}71''$

105 Encuentra el valor de $m$ para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45° con $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-3}{6}$.

$\vec{u}_r = (-3, 6), \vec{u}_s = (1, m)$

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 \cdot m|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = 3,\ m = -\frac{1}{3}$$

106 Obtén el valor que debe tener $b$ para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \dfrac{x+4}{-3}$.

$\vec{u}_r = (-3, 1), \vec{u}_s = (b, -3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}}$$

$$\rightarrow m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13},\ m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13}$$

107 Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a las rectas.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$  b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$  c) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{6}$  d) $y = \dfrac{4x-5}{3}$

a) $d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}\ u$

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$-x + 2 = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0\ u$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow 2x - y = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\ u$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \dfrac{17}{5}\ u$

**108** **Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por (−3, 6) y es paralela a $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-2}{8}$.**

Determinamos la recta pedida: $\dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-6}{8}$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}\ u$

**109** **¿Qué distancia hay entre los pares de rectas?**

**a)** $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: -x + 2y + 5 = 0$

**b)** $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{6}$ $\quad s: y = \dfrac{8x-3}{4}$

**c)** $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: y = \dfrac{-x-1}{3}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1)$, $\vec{u}_s = (-2, -1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de $r$ es $P(-1, 3)$

$d(r, s) = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

b) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (4, 8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u}_r = (3, -1)$, $\vec{u}_s = (3, -1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta $r$, $A(2, -1)$, y vemos si pertenece a $s$: $-1 = \dfrac{-2-1}{3}$.

Las rectas son coincidentes.

**110** Calcula el valor de $a$ para que la distancia del punto a la recta sea de 4 unidades.

$$r\colon\ 12x+5y-19=0 \qquad P(3, a)$$

$$4=\frac{|12\cdot 3+5a-19|}{\sqrt{12^2+5^2}} \rightarrow 52=|17+5a|$$

$$a=7,\ a=-\frac{69}{5}$$

**111** Halla el valor de $b$ para que la recta y el punto se encuentren a 5 unidades de distancia.

$$r\colon\ \frac{x+1}{b}=\frac{y+3}{3} \qquad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x+3=by+3b \rightarrow 3x-by+3-3b=0$$

$$5=\frac{|3\cdot(-4)-b\cdot 1+3-3b|}{\sqrt{3^2+(-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9+b^2}=|-9-4b|$$

$$9b^2-72b+144=0 \rightarrow b=4$$

**112** Determina $a$ para que las dos rectas sean paralelas y halla, en ese caso, la distancia que las separa.

$$r\colon\ \left.\begin{array}{l} x=4+3\lambda \\ y=-1+a\lambda \end{array}\right\} \qquad s\colon\ 4x-3ay+6=0$$

Expresamos la recta $r$ en forma general:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{a} \rightarrow ax-4a=3y+3 \rightarrow ax-3y-4a-3=0$$

Para que las rectas sean paralelas se debe cumplir que:

$$\frac{a}{4}=\frac{-3}{-3a}\neq\frac{-4a-3}{6} \rightarrow a=\pm 2$$

Tomamos un punto $P(4, -1)$ de la recta $r$, y calculamos la distancia entre el punto y la recta $s$.

Si $a=2$:

$$d(P, r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 4-6\cdot(-1)+6|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}}=\frac{28}{2\sqrt{13}}=\frac{14\sqrt{13}}{13}\ u$$

Si $a=-2$:

$$d(P, r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 4+6\cdot(-1)+6|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{16}{2\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{13}\ u$$

113 Encuentra la ecuación de una recta paralela a $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ y que se halla a 8 unidades de distancia de ella.

La recta tiene esta ecuación general.

$4x + 3y + C = 0$

$$8 = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \rightarrow 40 = |11 + C|$$

$C = 29, C = -51$

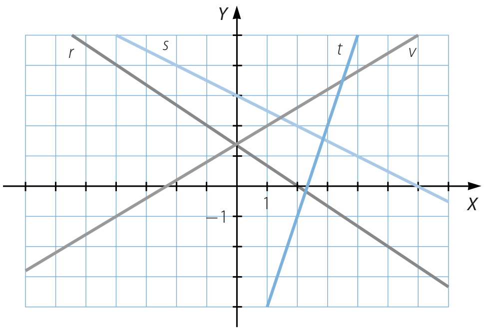
Las siguientes rectas cumplen las condiciones indicadas.

$4x + 3y + 29 = 0$

$4x + 3y - 51 = 0$

114 Encuentra las ecuaciones, en las formas que se piden, de las siguientes rectas.

*r* en forma paramétrica. *t* en forma explícita.
*s* en forma continua. *v* en forma general.




$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(2,\,-1)} -1 = 2m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3,\,2)} 2 = 3m + n \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $m = 3$ y $n = -7$.

$t$: $y = 3x - 7$

$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-4,\,-1)} -1 = -4m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(1,\,2)} 2 = m + n \end{array}\right\}$$

Y resolviendo el sistema, obtenemos $m = \frac{3}{5}$ y $n = \frac{7}{5}$.

$$v: y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \rightarrow -3x + 5y - 7 = 0$$

**115** Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

**116** Verifica si los puntos $(-4, -3)$, $(1, 4)$ y $(16, 23)$ están alineados. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta.

Llamamos a los puntos:

$P(-4, -3)$

$Q(1, 4)$

$R(16, 23)$

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (5, 7)$

$\overrightarrow{PR} = (20, 26)$

Como los vectores no son proporcionales, los puntos no están alineados.

**117** Halla el área del triángulo cuyos vértices son $(2, 1)$, $(4, 3)$ y $(6, -1)$.

Llamamos a los puntos:

$P(2, 1)$

$Q(4, 3)$

$R(6, -1)$

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (2, 2)$ $\quad \overrightarrow{PR} = (4, -2)$ $\quad \overrightarrow{QR} = (2, -4)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Hallamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{18}\ u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = 6\ u^2$$

**118** Las rectas que contienen los lados de un triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$. Calcula sus vértices y su área.

Hallamos los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 6x + 5y - 24 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 6(-y+5) + 5y - 24 = 0 \rightarrow -y + 6 = 0$$

$y = 6, x = -1$

Las rectas se cortan en el punto $P(-1, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 2(-y+5) + y - 8 = 0 \rightarrow -y + 2 = 0$$

$y = 2, x = 3$

Las rectas se cortan en el punto $Q(3, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 5y - 24 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=-2x+8} 6x + 5(-2x+8) - 24 = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0$$

$x = 4, y = 0 \rightarrow$ Las rectas se cortan en el punto $R(4, 0)$.

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -4) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

$\overrightarrow{PR} = (5, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$

$\overrightarrow{QR} = (1, -2) \rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Hallamos la altura, $h$, sobre el lado mayor:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sqrt{32}\right)^2 = x^2 + h^2 \\ \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{61} - x\right)^2 + h^2 \end{array}\right\} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{61}}{61}\ u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \frac{4\sqrt{61}}{61}}{2} = 2\ u^2$$

**119** La recta que pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $\frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.

Calculamos la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte con el eje $X$:

$$0 = 3 - 6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow P(4, 0)$$

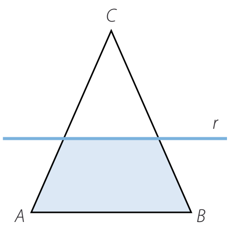
Hallamos el punto de corte con el eje $Y$:

$$0 = 2 + 4\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow Q(0, 6)$$

Como el triángulo que se forma es rectángulo, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ u^2$$

**120** **Tenemos un triángulo de vértices $A(4, 9)$, $B(11, 10)$ y $C(9, 4)$. Comprueba que es un triángulo isósceles. Trazamos una recta paralela al lado desigual, pasando por (7, 6), y se forma un trapecio isósceles. Determina su área.**




Comprobamos que el triángulo es isósceles:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$$

Hallamos los puntos de corte de la recta $r$ con los lados $AB$ y $AC$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x - 7y + 59 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D\left(\frac{41}{5}, \frac{48}{5}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x + y - 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E(7, 6)$$

Obtenemos el punto medio, $M$, del segmento $BC$: $M(10, 7)$

Calculamos el punto de corte de $r$ con el segmento $AM$:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 15 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow M'\left(\frac{38}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

Hallamos la longitud de la base menor y de la altura:

$$\overrightarrow{DE} = \sqrt{\left(7 - \frac{41}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{48}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \sqrt{\left(\frac{38}{5} - 10\right)^2 + \left(\frac{39}{5} - 7\right)^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5}$$

Calculamos el área:

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{\left(\sqrt{40} + \frac{6\sqrt{10}}{5}\right)\frac{4\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{64}{5} = 12{,}8\ u^2$$

**121** **Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro lado está sobre la recta $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 6\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$. Determínalo y halla el área del triángulo.**

Igualamos el módulo de los vectores que van de la recta hasta los puntos $A$ y $B$.

$$\sqrt{(1 - 6\lambda - 2)^2 + (1 + 2\lambda - 2)^2} = \sqrt{(1 - 6\lambda + 10)^2 + (1 + 2\lambda + 2)^2}$$

$$\rightarrow \lambda = 1 \rightarrow C(-5, 3)$$

Hallamos las longitudes de los lados: $\overrightarrow{AB} = (-12, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-7, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (5, 5)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-12)^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

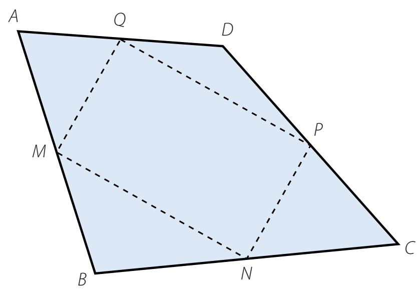
Determinamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2} = \sqrt{10}\ u$$

Por tanto, el área es: $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = 20\ u^2$

122 ●●○

**En un cuadrilátero *ABCD* hemos dibujado los puntos medios de sus lados, *M*, *N*, *P* y *Q*, y los hemos unido formando otro cuadrilátero. Determina las coordenadas de los demás puntos si *A*(7, 9), *M*(5, 6), *P*(9, 6) y *Q*(12, 0).**




**Comprueba que se verifica la propiedad de que los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.**

$$(5, 6) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow B(3, 3)$$

$$(12, 0) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow D(17, -9)$$

$$(9, 6) = \left(\frac{17+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow C(1, 21)$$

$$N(x, y) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+21}{2}\right) \rightarrow N(2, 12)$$

$\overrightarrow{MN} = (-3, 6)$ $\quad \overrightarrow{QP} = (-3, 6)$ $\quad \overrightarrow{MQ} = (-7, -6)$ $\quad \overrightarrow{NP} = (-7, -6)$

Por tanto, se forma un paralelogramo.

123 ●○○

**Los puntos (0, −2), (1, 1), (5, 2) y (4, −1) son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.**

Llamamos a los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$ y $D(4, -1)$.

Calculamos las ecuaciones de sus diagonales:

$$\frac{x}{5} = \frac{y+2}{4} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$\overrightarrow{AB} = (1, 3)$ $\quad \overrightarrow{DC} = (1, 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (4, 1)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (4, 1)$

Es un paralelogramo.

**124** ●●○ **Calcula el centro de un paralelogramo del que conocemos tres vértices: (5, −1), (9, 5) y (−1, −5). ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Por qué? Haz un dibujo en el que se muestren todas las soluciones.**

Llamamos a los puntos $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ y $C(-1, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Hacemos una traslación con origen en $C$ y vector $(4, 6)$, y obtenemos un punto $D$, que forma un paralelogramo: $D(3, 1)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E$:

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \rightarrow E(4, 0)$$

Hacemos una traslación con origen en $C$ y vector $(-4, -6)$, y obtenemos un punto $D'$, que forma un paralelogramo: $D'(-5, -11)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E'$:

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \rightarrow E'(2, -3)$$

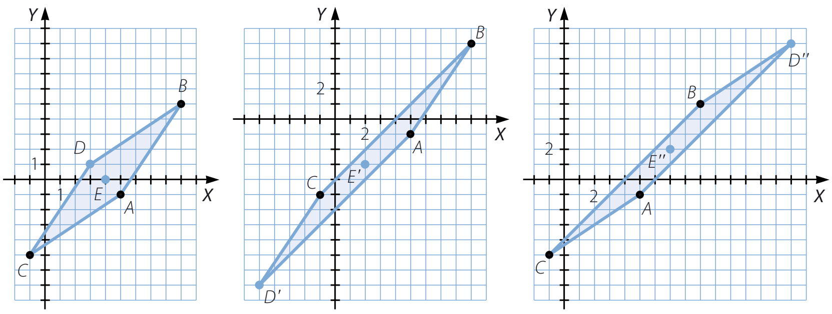
$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

Hacemos una traslación con origen en $A$ y vector $(10, 10)$, y obtenemos un punto $D''$, que forma un paralelogramo: $D'' = (15, 9)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E''$:

$$(x, y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \rightarrow E''(7, 2)$$

Este problema tiene tres soluciones.




**125** ●○○ **Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son (1, 5) y (−3, −7).**

Llamamos a los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, -7)$.

Calculamos el punto medio, $M$: $M(-1, -1)$

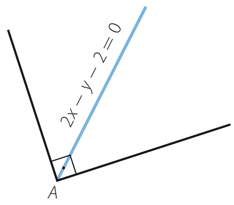
Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, -12)$.

Un vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ es $(-3, 1)$.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+1}{1}$$

**126** **Un ángulo recto contiene su vértice en el punto $A(3, 4)$ y su bisectriz tiene por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de sus lados.**




La bisectriz tiene por vector director (1, 2).

Escribimos la ecuación punto-pendiente de los lados:

$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = -3,\ m = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones son: $3x + y - 13 = 0 \qquad -\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

**127** **Encuentra una recta que forme un ángulo de 60° con la recta $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}$ y que pase por el punto $(-4, 2)$.**

Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

Las ecuaciones son: $y - 2 = \frac{-6 - 5\sqrt{13}}{13}(x + 4) \qquad y - 2 = \frac{-6 + 5\sqrt{13}}{13}(x + 4)$

**128** **Calcula el valor de $k$ para que las tres rectas: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ y $4x + 7y - 5 = 0$ se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.**

Hallamos las coordenadas del punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (3, -1)$$

$-3 + 2 \cdot (-1) + k = 0 \rightarrow k = 5$

**129** **Obtén los ángulos del triángulo cuyos vértices son $(3, -5)$, $(1, 6)$ y $(-3, 2)$.**

Llamamos a los puntos $A(3, -5)$, $B(1, 6)$ y $C(-3, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 11) \qquad \overrightarrow{AC} = (-6, 7) \qquad \overrightarrow{CB} = (4, 4)$

$$\cos \alpha = \frac{|-2 \cdot (-6) + 11 \cdot 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 7^2}} \rightarrow \alpha = 30°\ 17'\ 47{,}21''$$

$$\cos \beta = \frac{|-2 \cdot 4 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow \beta = 55°\ 18'\ 17{,}45''$$

$180° - 30°\ 17'\ 47{,}21'' - 55°\ 18'\ 17{,}45'' = 94°\ 23'\ 55{,}34''$

**130** Halla un punto de la recta $2x - y + 18 = 0$ que equidiste de los puntos $(3, -1)$ y $(7, 3)$.

Despejamos $y$ de la ecuación de la recta:

$y = 2x + 18$

Los puntos de la recta son de la forma: $(x, 2x + 18)$

Como los puntos deben estar a la misma distancia de la recta, tenemos que:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (2x+18-(-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (2x+18-3)^2} \rightarrow x = -4$$

$2 \cdot (-4) + 18 = 10$

El punto es $(-4, 10)$.

**131** Halla la ecuación de una recta $r$ que pase por los puntos $(5, -4)$ y $(3, 6)$ y, después, la ecuación de una recta $s$ paralela a $r$ y que esté a 8 unidades de distancia.

$\vec{u}_r = \vec{u}_s = (-2, 10)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 - 2\lambda \\ y = -4 + 10\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{10} \rightarrow 5x + y - 21 = 0$$

Calculamos los puntos que distan 5 unidades de la recta $r$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow 5 = \frac{|5 \cdot x + 1 \cdot y - 21|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -5x + 21 - 5\sqrt{26} \\ y = -5x + 21 + 5\sqrt{26} \end{array}\right\}$$

Tomamos los puntos $\left(1, 16 - 5\sqrt{26}\right)$ y $\left(1, 16 + 5\sqrt{26}\right)$.

Las rectas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 - 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 + 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array}\right\}$$

**132** Encuentra un punto en el eje de abscisas que esté a la misma distancia del punto $A(5, 4)$ que de la recta $r$: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-4}{3}$.

Escribimos la ecuación general de la recta, $r$:

$3x - 4y + 19 = 0$

Tomamos un punto $P(x, 0)$ del eje de abscisas:

$$\sqrt{(5-x)^2 + 16} = \frac{|3x - 4 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow x = 2$$

El punto es $(2, 0)$.

**133** Dados los puntos $P(-3, 2)$ y $Q(5, 6)$, determina la ecuación de la recta que pasa por $P$ y que dista 5 unidades de $Q$. Esa recta forma un ángulo con la recta que une $P$ y $Q$. Halla su medida.

Calculamos las rectas que pasan por $P$:

$$x + By + C = 0 \xrightarrow{(-3,\,2)} C = 3 - 2B$$

$$x + By + 3 - 2B = 0$$

Hallamos las rectas que distan 5 unidades de $Q$:

$$d(Q, s) = \frac{|5 + 6B + 3 - 2B|}{\sqrt{1^2 + B^2}} = 5 \rightarrow |4B + 8| = 5\sqrt{1 + B^2} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{32 - 5\sqrt{55}}{9} \\ b_2 = \dfrac{32 + 5\sqrt{55}}{9} \end{array}\right\}$$

Las rectas buscadas son:

$$r\colon x + \frac{32 - 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 + 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

$$s\colon x + \frac{32 + 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 - 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

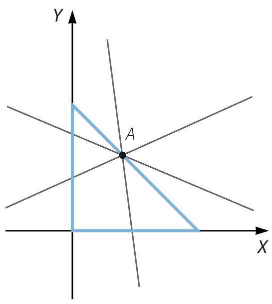
El vector director de la recta que une $P$ con $Q$ es: $\overrightarrow{PQ} = (8, 4) = (2, 1)$

$$\vec{u}_r = \left(\frac{-32 + 5\sqrt{55}}{9}, 1\right) = \left(-32 + 5\sqrt{55}, 9\right)$$

Determinamos el ángulo formado, que es igual para ambas rectas:

$$\cos\alpha = \frac{\left|2 \cdot \left(-32 + 5\sqrt{55}\right) + 1 \cdot 9\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-32 + 5\sqrt{55}\right)^2 + 9^2}} = 0{,}2074 \rightarrow \alpha = 78^\circ\ 1'\ 33{,}69''$$

**134** De todas las rectas que pasan por el punto $A(2, 3)$, calcula la recta que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.




Las rectas que pasan por $A$ son de la forma:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Estas rectas cortan a los ejes en los puntos:

$$(0, 3 - 2m) \qquad \left(\frac{-3 + 2m}{m}, 0\right)$$

La distancia al origen $(0, 0)$ debe ser igual:

$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m}\right)^2} \rightarrow \text{Hay tres soluciones.}$$

$$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$$

$$m_2 = 1 \longrightarrow y = x + 1$$

$$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

**135** Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, 5). Comprueba que esa ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$.

Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos ($a$, 0) y (0, $b$), su ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Esta manera de escribir una recta se llama *forma canónica o segmentaria.*

Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r=(3,-5)$

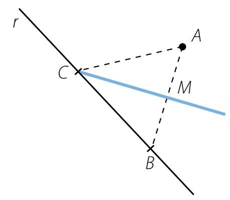
$$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{-5}\rightarrow\frac{x}{3}-1=-\frac{y}{5}\rightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

Hallamos el vector director de la recta:

$\vec{u}_r=(a,-b)$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b}\rightarrow\frac{x}{a}-\frac{a}{a}=-\frac{y}{b}\rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

**136** El punto (−4, 2) es el vértice $A$ de un triángulo cuyo lado $a$ se localiza sobre la recta $3x+2y+18=0$. La ecuación de la mediana que parte del vértice $C$ es $x+y+5=0$. Determina los vértices $B$ y $C$.




Hallamos el punto $C$, intersección de la recta $r$ y la mediana:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y+18=0\\x+y+5=0\end{array}\right\}\rightarrow(-8,3)$$

El punto $B$ es de la forma:

$$\left(x,\frac{-3x-18}{2}\right)$$

Y el punto $M$ es de la forma:

$(t,-t-5)$

Por tanto, tenemos que:

$$(t,-t-5)=\left(\frac{x-4}{2},\frac{\frac{-3x-18}{2}+2}{2}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}t=\dfrac{x-4}{2}\\-t-5=\dfrac{-3x-18+4}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2\\t=-3\end{array}\right\}$$

$B(-2,-6)$ $M(-3,-2)$

137 Comprueba que las rectas son paralelas.

$$r: \frac{x-1}{6} = \frac{y+4}{8} \qquad s: -4x + 3y + 6 = 0$$

Demuestra que todos los puntos $M$ que se obtienen por el siguiente procedimiento se sitúan sobre una recta, y calcula su ecuación: «Toma un punto $A$ de la recta $r$ y un punto $B$ de $s$, y halla el punto medio $M$ del segmento de extremos $A$ y $B$».

$\vec{u}_r = (6, 8)$, $\vec{u}_s = (3, 4)$

Como los vectores directores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto $A$ de $r$ y vemos si verifica las ecuaciones de $s$:

$A(1, -4) \qquad -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 6 \neq 0$

Por tanto, las rectas son paralelas.

Expresamos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 6\lambda \\ y = -4 + 8\lambda \end{array}\right\} \quad s: \left.\begin{array}{l} x = 6\mu \\ y = 2 + 8\mu \end{array}\right\}$$

Los puntos medios son:

$$\left(\frac{1 + 6\lambda + 6\mu}{2}, \frac{-4 + 8\lambda + 8\mu}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 3(\lambda + \mu), -2 + 4(\lambda + \mu)\right)$$

Por tanto, si hacemos $t = \lambda + \mu$, los puntos pedidos están en la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} + 3t \\ y = -2 + 4t \end{array}\right\}$$

138 Tres de los vértices de un rombo son los puntos (2, −1), (5, 3) y (10, 3). Halla el cuarto vértice y calcula su área.

Calculamos la distancia entre los vértices:

$$\sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = 5$$

$$\sqrt{(10-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{80}$$

$$\sqrt{(10-5)^2 + (3-3)^2} = 5$$

Por tanto, los puntos (10, 3) y (2, 1) son vértices no consecutivos del rombo. En consecuencia, los otros vértices, $(x, y)$ y (5, 3), distan 5 unidades de ellos.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{(10-x)^2 + (3-y)^2} = 5 \\ \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5,\ y = 3 \\ x = 7,\ y = -1 \end{array}\right\}$$

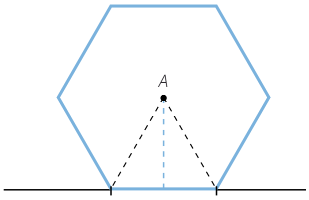
El cuarto vértice es (7, −1).

Calculamos la otra diagonal y su área:

$$\sqrt{(7-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}}{2} = 20\ u^2$$

**139** **El centro de un hexágono regular es el punto (6, −2) y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina las coordenadas de los vértices y su área.**




Calculamos la longitud de la apotema:

$$d(A, r) = \frac{|-4 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Hallamos la longitud del lado: $l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow l = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ u$

Determinamos el área: $A = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5}{2} = 50\sqrt{3}\ u^2$

Calculamos los puntos que distan $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de $A$ y pertenecen a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{(6-x)^2 + (-2-y)^2} \\ -4x + 3y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} + 2,\ y_1 = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} + 2,\ y_2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\}$$

$$B\left(\sqrt{3} + 2,\ 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \qquad C\left(-\sqrt{3} + 2,\ 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Otros dos vértices son simétricos a los vértices calculados respecto de $A$.

$$(6, -2) = \left(\frac{\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow D\left(10 - \sqrt{3}, -5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6, -2) = \left(\frac{-\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow E\left(10 + \sqrt{3}, -5 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Para calcular los restantes vértices tenemos en cuenta la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\left(10 + \sqrt{3} - x\right)^2 + \left(-5 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{\left(\sqrt{3} + 2 - x\right)^2 + \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6,\ y = -2 \\ x = 2\sqrt{3} + 6,\ y = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\left(10 - \sqrt{3} - x\right)^2 + \left(-5 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{\left(-\sqrt{3} + 2 - x\right)^2 + \left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6,\ y = -2 \\ x = -2\sqrt{3} + 6,\ y = -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array}\right\}$$

$$F\left(2\sqrt{3} + 6, \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right) \qquad G\left(-2\sqrt{3} + 6, -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

**140** ●●● **Dos vértices no consecutivos de un rombo están en los puntos (3, 1) y (9, 9) y uno de sus lados es paralelo a la recta** $\left.\begin{array}{l} x = 5+\lambda \\ y = -1-2\lambda \end{array}\right\}$. **Halla las coordenadas de los otros vértices, la longitud de su lado y el área.**

Calculamos las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices conocidos y son paralelas a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3+\lambda \\ y = 1-2\lambda \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 9+\mu \\ y = 9-2\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos la mediatriz del segmento que une los vértices dados:

$M(6, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 6+2t \\ y = 5+t \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de la mediatriz con los lados:

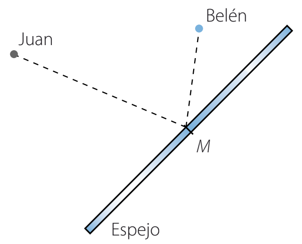
$$\left.\begin{array}{l} 3+\lambda = 6+2t \\ 1-2\lambda = 5+t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ t = -2 \end{array}\right\}$$

El punto pedido es (2, 3):

$$\left.\begin{array}{l} 9+\mu = 6+2t \\ 9-2\mu = 5+t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 1 \\ t = 2 \end{array}\right\}$$

El punto pedido es (12, 8).

**141** ●●● **Juan y Belén se están mirando, uno al otro, a través de un espejo situado según la recta de ecuación $y = -x + 2$. Belén se encuentra en el punto (−9, −1) y Juan en (−4, 3). ¿Qué coordenadas tiene el punto *M* al que miran?**




Hallamos el vector director de la recta dada:

$\vec{u}_r = (1, -1)$

Un vector perpendicular es $\vec{u}_s = (1, 1)$.

La recta, perpendicular al espejo, que pasa por donde está Belén es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -9+\lambda \\ y = -1+\lambda \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de las dos rectas:

$-1+\lambda = 9-\lambda+2 \rightarrow \lambda = 6 \rightarrow (-3, 5)$

Calculamos el punto simétrico respecto del espejo, $B'$:

$$(-3, 5) = \left(\frac{x-9}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \rightarrow B' = (3, 11)$$

Repitiendo el proceso con el otro punto dado obtenemos $J'$:

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array}\right\}$$

$$3 + \lambda = 4 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \rightarrow J'(-1, 6)$$

Determinamos la recta que pasa por $(-9, 1)$ y por $J'$:

$$\left.\begin{array}{l} x = -9 + 8\lambda \\ y = -1 + 7\lambda \end{array}\right\}$$

Calculamos la recta que pasa por $(-4, 3)$ y por $B'$:

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 + 7\mu \\ y = 3 + 8\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} -9 + 8\lambda = -4 + 7\mu \\ -1 + 7\lambda = 3 + 8\mu \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \rightarrow \mu = \frac{1}{5}$$

El punto de corte es: $\left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5}\right)$

**142** **Calcula las mediatrices del triángulo cuyos vértices son (−1, 1), (7, −1) y (5, −3). Prueba que se cortan en el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Comprueba que puede trazarse una circunferencia que pasa por los tres vértices, con centro en ese punto. ¿Cuánto medirá el radio?**

Llamamos a los puntos $A(-1, 1)$, $B(7, -1)$ y $C(5, -3)$.

Calculamos el punto medio, $A'$, del lado $BC$:

$A'(6, -2)$

Hallamos un vector perpendicular al lado $BC$:

$(-2, 2)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por $A'$ es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+2}{2} \rightarrow x + y - 4 = 0$$

Calculamos el punto medio, $C'$, del lado $AB$:

$C'(3, 0)$

Hallamos un vector perpendicular al lado $AB$:

$(1, 4)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por $C'$ es:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{4} \to 4x-y-12=0$$

Calculamos el punto medio, $B'$, del lado $AC$:

$B'(2,-1)$

Hallamos un vector perpendicular al lado $AC$:

$(2, 3)$

La ecuación de la mediatriz que pasa por $B'$ es:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3} \to 3x-2y-8=0$$

Determinamos el punto de corte de las mediatrices:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ 4x-y-12=0 \\ 3x-2y-8=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{array}\right\}$$

El circuncentro es:

$$\left(\frac{16}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Calculamos la distancia del circuncentro a los vértices y comprobamos que es igual.

$$\sqrt{\left(-1-\frac{16}{5}\right)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

$$\sqrt{\left(7-\frac{16}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

$$\sqrt{\left(5-\frac{16}{5}\right)^2+\left(-3-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$$

Por tanto, el radio mide $\frac{\sqrt{442}}{5}\ u$.

**143** **Halla las medianas del triángulo cuyos vértices son (−4, 6), (3, 0) y (−2, −3). Prueba que se cortan en el baricentro. Comprueba que los vértices de un triángulo tienen coordenadas $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, y $(x_3, y_3)$, y las coordenadas del baricentro son:**

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Llamamos a los puntos $A(-4, 6)$, $B(3, 0)$ y $C(-2, -3)$.

Calculamos el punto medio, $A'$, del lado $BC$:

$$A'\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

Determinamos la mediana que pasa por $AA'$:

$$\frac{x+4}{-9}=\frac{y-6}{15} \to 15x+9y+6=0$$

Calculamos el punto medio, $B'$, del lado $AC$:

$B'\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$

Hallamos la mediana que pasa por $BB'$:

$$\frac{x-3}{12} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x - 12y + 9 = 0$$

Determinamos el punto medio, $C'$, del lado $BA$:

$C'\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$

Calculamos la mediana que pasa por $CC'$:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{12} \rightarrow 12x - 3y + 15 = 0$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 15x + 9y + 6 = 0 \\ -3x - 12y + 9 = 0 \\ 12x - 3y + 15 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El baricentro es } (-1, 1)$$

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $T(x_3, y_3)$, determinamos el punto medio, $P'$, del lado $QT$:

$P'\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$

Hallamos la mediana que pasa por $PP'$:

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{x_2+x_3}{2}-x_1} = \frac{y-y_1}{\dfrac{y_2+y_3}{2}-y_1} \rightarrow \frac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1} = \frac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1}$$

Calculamos el punto medio, $Q'$, del lado $PT$:

$Q'\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}, \dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$

Determinamos la mediana que pasa por $QQ'$:

$$\frac{x-x_2}{\dfrac{x_1+x_3}{2}-x_2} = \frac{y-y_2}{\dfrac{y_1+y_3}{2}-y_2} \rightarrow \frac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2} = \frac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2}$$

Hallamos la intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x_1}{x_2+x_3-2x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2+y_3-2y_1} \\ \dfrac{x-x_2}{x_1+x_3-2x_2} = \dfrac{y-y_2}{y_1+y_3-2y_2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1} - x_1 \\ x = \dfrac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2} - x_2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{(y-y_1)(x_2+x_3-2x_1)}{y_2+y_3-2y_1} - x_1 = \frac{(y-y_2)(x_1+x_3-2x_2)}{y_1+y_3-2y_2} - x_2$$

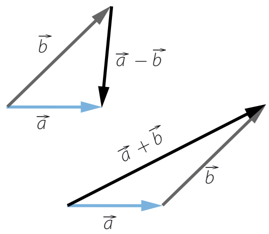
$$\rightarrow y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Sustituyendo, resulta que: $x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

## PARA FINALIZAR...

144 Calcula el ángulo que deben formar dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para que sus módulos coincidan con el módulo de su diferencia, $\vec{a}-\vec{b}$: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

¿Y para que coincidan con el módulo de su suma, $\vec{a}+\vec{b}$?




$\vec{a}=(x, y)$

$\vec{b}=(z, t)$

$\vec{a}-\vec{b}=(x-z, y-t)$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{z^2+t^2}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}=\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}$

Igualando, resulta que:

$$x^2+y^2=x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt \rightarrow \frac{z^2+t^2}{2}=xz+yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{xz+yt}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{z^2+t^2}}=\frac{1}{2}\rightarrow \alpha=60°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su diferencia deben formar un ángulo de 60°.

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}=\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}$

Igualando, tenemos que:

$$x^2+y^2=x^2+z^2+2xz+y^2+t^2+2yt \rightarrow \frac{z^2+t^2}{-2}=xz+yt$$

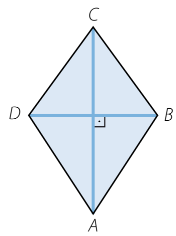
Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{xz+yt}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{z^2+t^2}}=-\frac{1}{2}\rightarrow \alpha=120°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su suma deben formar un ángulo de 120°.

145 **Demuestra que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ forman un ángulo recto.**

**Deduce de este resultado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.**




Aplicamos los resultados de la actividad anterior:

$\vec{u}=(x, y)$

$\vec{v}=(z, t)$

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(x-z)^2+(y-t)^2}=\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2}=\sqrt{x^2+z^2+2xz+y^2+t^2+2yt}$$

$$\sqrt{x^2+z^2-2xz+y^2+t^2-2yt}=\sqrt{x^2+z^2+2xz+y^2+t^2+2yt}\rightarrow 0=xz+yt$$

$$\cos\alpha=\frac{xz+yt}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{z^2+t^2}}=0\rightarrow\alpha=90°$$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de los lados del rombo, que tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo se obtienen, respectivamente, sumando y restando $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo que las diagonales son perpendiculares.

146 **Si $\vec{u}$ es un vector del plano de módulo 1:**

**a) ¿Cuántos vectores $\vec{v}$ hay de módulo 2, tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$?**

**b) ¿Y tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$?**

**c) ¿Y tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$?**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow -1=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}\rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=120°\\ \alpha=240°\end{matrix}\right\}$

Hay dos vectores.

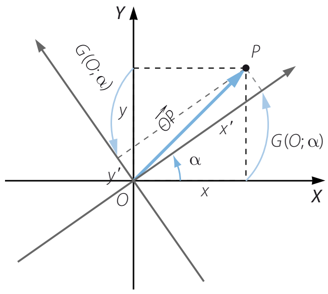
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow 2=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=1\rightarrow\alpha=0°$

Solo hay un vector.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow -3=1\cdot 2\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=-\frac{3}{2}\rightarrow$ No tiene solución.

No hay ningún vector.

147 Las coordenadas de un punto $P$ en un sistema cartesiano son $(x, y)$. Halla las coordenadas $(x', y')$ del mismo punto después de girar los ejes, alrededor del origen de coordenadas, un ángulo $\alpha$.

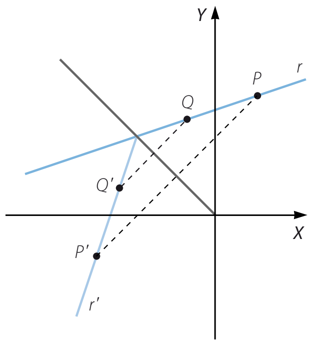



Realizamos un cambio de sistema de referencia con centro en el origen y giro de amplitud $\alpha$.

$x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$
$y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$

148 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta simétrica, respecto de la bisectriz del segundo cuadrante, a la recta $r$, de ecuación $y = 3x + 4$?

a) $3y = x + 4$
b) $3y = x - 4$
c) $y = 3x - 4$
d) $y = 4x + 3$




Calculamos el baricentro, $G$, y para ello sumamos las coordenadas de los puntos y dividimos entre tres:
$G(-1, 0)$

Para hallar el ortocentro, calculamos una recta perpendicular al lado $AB$ que pase por $C$:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{2}$$

Determinamos una recta perpendicular al lado *AC* que pase por *B*:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+4}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el ortocentro:

$$H\left(-\frac{1}{3},-\frac{10}{3}\right)$$

Para hallar el circuncentro, calculamos la recta que pasa por el punto medio del lado *AB* y es perpendicular al mismo:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}$$

Determinamos la recta que pasa por el punto medio del lado *AC* y es perpendicular al mismo:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el circuncentro:

$$O\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Calculamos la recta que pasa por *GH*:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-5}\rightarrow 5x+y+5=0$$

Como *O* verifica las ecuaciones de la ecuación de la recta, los tres puntos están alineados.

Hallamos la distancia *GH*:

$$|GH|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{104}}{3}$$

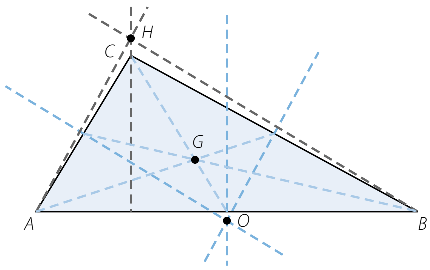
Calculamos la distancia *GO*:

$$|GO|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}+1\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

Por tanto, se verifica la relación, ya que resulta que:

$$|GH|=\frac{\sqrt{104}}{3}=\frac{2\sqrt{26}}{3}=2|GO|$$

149 Dado el triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, -4)$ y $C(3, -2)$, comprueba que el baricentro $G$, el ortocentro $H$ y el circuncentro $O$ están en línea recta (recta de Euler) y que verifican la relación $GH = 2GO$.




Calculamos la intersección de la recta dada con la bisectriz del segundo cuadrante:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 4 \\ y = -x \end{array}\right\} \rightarrow (-1, 1)$$

Por tanto, el punto $(-1, 1)$ debe pertenecer a la recta simétrica.

La única ecuación de las rectas dadas que pasa por el punto es:
$3y = x + 4$