

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

En busca de Klingsor

Cierta vez, un reportero preguntó a Einstein:

–¿Existe una fórmula para obtener éxito en la vida?

–Sí, la hay.

–¿Cuál es? –preguntó el reportero, insistente.

–Si A representa al éxito, diría que la fórmula es $A = x + y + z$, en donde x es el trabajo e y la suerte –explicó Einstein.

–¿Y qué sería la z ?

Einstein sonrió antes de responder:

–Mantener la boca cerrada.

Un joven norteamericano, Bacon, estudia Física en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y allí conoce a Einstein, del que recuerda algunas anécdotas como esta. Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, se hace espía y viaja a Alemania para encontrar al máximo responsable de las investigaciones atómicas realizadas por los nazis, que se esconde bajo el seudónimo de Klingsor. En sus pesquisas le ayuda un matemático, de nombre Links, que formó parte del equipo de investigación nuclear.

¿Por qué estábamos juntos el teniente Bacon y yo [pensaba Links]?

¿Cuándo nos encontramos por primera vez? ¿Cuál era nuestra misión?

¿Cómo se cruzaron, en fin, nuestras vidas paralelas? Para responder a estos cuestionamientos no me queda más remedio que hablar un poco de mí.

Ubico mi nacimiento en el mapa de mi imaginación como un pequeño punto dibujado en el centro de un plano cartesiano. Hacia arriba, en el eje de las y , está todo lo positivo que me ha ocurrido; en contraposición, hacia abajo descubro mis desventuras, mis retrocesos y mis requiebros. A la derecha, en el eje de las x , encuentro los actos que me definen, aquellos que voluntariamente he convertido en el centro de mi vida –deseos, anhelos, obsesiones–, mientras que, a la izquierda, yacen esas porciones de mi ser que me han modelado contra mi voluntad o mi conciencia, esas partes aparentemente impredecibles o espontáneas que, no puedo negarlo, también me han llevado adonde estoy ahora. ¿Cuál sería el resultado final de un ejercicio como éste? ¿Qué forma aparecería en medio de la hoja? ¿Sería posible trazar las coordenadas que he recorrido a lo largo de mi trayecto? ¿Y obtener, a partir de esa línea, la fórmula que me resuma en cuerpo y alma?

JORGE VOLPI

Juzga la metáfora de Links. ¿Sería posible representar una «vida» mediante una curva en un sistema de coordenadas cartesianas?

No sería posible, ya que los elementos que se describen en el texto no son traducibles a puntos del plano que puedan describir una curva.

ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

001 Dada la función $f(x) = \log(\operatorname{sen} x)$:

a) ¿Está definida para $x = \frac{\pi}{2}$? b) ¿Y para $x = \frac{3\pi}{2}$?

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \log 1 = 0 \rightarrow$ La función está definida para $x = \frac{\pi}{2}$.

b) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \log\left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = \log(-1) \rightarrow$ La función no está definida para $x = \frac{3\pi}{2}$, porque no existe el logaritmo de -1 .

002 Expresa las siguientes condiciones en forma de intervalo.

a) $-1 \leq x < 5$ b) $x \geq 7$ c) $x \leq -2$ d) Todos los números reales.

a) $[-1, 5)$ b) $[7, +\infty)$ c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, +\infty)$

003 Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

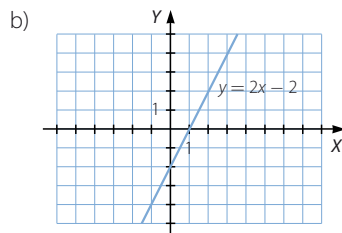
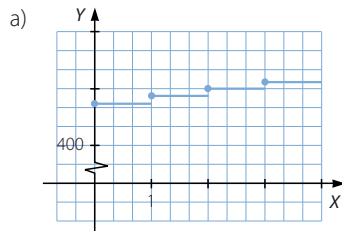
$$f(x) = x^3 - 2x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

004 Dibuja estas funciones e indica de qué tipo son.

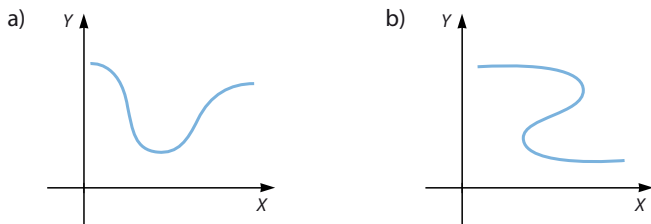
a) Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 €, y por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión.

b) A cada número real le hacemos corresponder su doble menos 2.



ACTIVIDADES

001 Justifica si las siguientes gráficas corresponden a funciones.



- a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- b) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y .

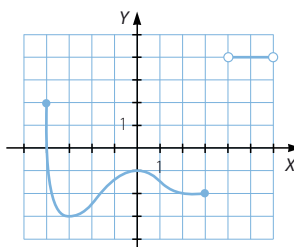
002 Razona, en cada caso, si la relación entre las magnitudes es una función o no.

- a) La distancia entre dos ciudades y el tiempo que se tarda en ir de una a otra.
- b) La cantidad de fruta que compra una familia, en kilogramos, y el precio por kilogramo.
- c) La altura de los alumnos de un centro escolar y su edad.
 - a) No se trata de una función, ya que según sea la distancia entre dos ciudades, el tiempo que se tarda puede tomar valores distintos, dependiendo de la velocidad a la que se circule.
 - b) Es una función, puesto que para cada cantidad de fruta que se compre hay un precio único según el peso por kilogramo adquirido.
 - c) No se trata de una función, porque distintos alumnos pueden tener la misma altura, aún siendo de edades distintas.

003 Determina el dominio y el recorrido de esta función.

$$\text{Dom } f = [-4, 3] \cup (4, 6)$$

$$\text{Im } f = [-3, 2] \cup \{4\}$$

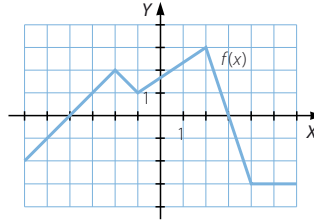


004 ¿Cuál es el dominio de estas funciones?

- | | |
|---|---------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{x + 4}$ | c) $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 9x$ |
| b) $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 16}$ | d) $f(x) = \cos x$ |
| a) $\text{Dom } f = [-4, +\infty)$ | c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ |
| b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$ | d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ |

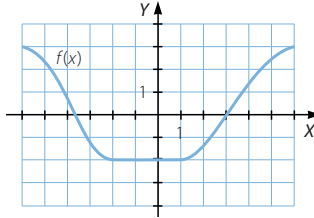
005 ¿En qué intervalos es creciente esta función?
¿Y decreciente? En $x = 2$, ¿es cóncava o convexa?

La función es creciente en $(-6, -2) \cup (-1, 2)$.
La función es decreciente en $(-2, -1) \cup (2, 4)$.
En $x = 2$, la función no es ni cóncava ni convexa.



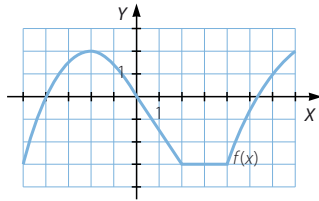
006 Estudia el crecimiento de la función.

La función es decreciente en $(-\infty, -2)$, es constante en $(-2, 1)$ y es creciente en $(1, +\infty)$.



007 ¿En qué puntos de la función hay máximos relativos? ¿Y mínimos relativos? ¿Tiene máximos o mínimos absolutos?

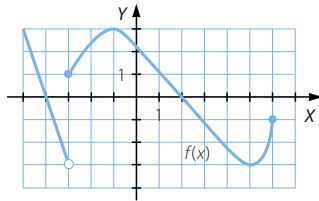
Existe un máximo relativo en el punto $x = -2$.
No tiene mínimos relativos ni absolutos y no hay máximos absolutos.



008 Estudia el dominio, el recorrido, el crecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

$\text{Dom } f = (-\infty, 6]$
 $\text{Im } f = [-3, +\infty)$
La función es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 5)$ y es creciente en $(-3, -1) \cup (5, 6)$.

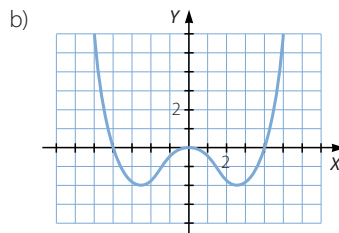
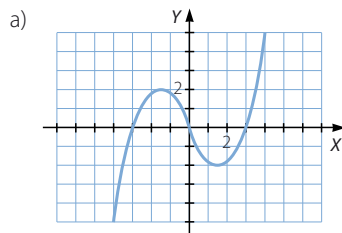
Existe un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo absoluto en $x = 5$.
No hay máximos absolutos.



009 Dibuja la gráfica de una función para que sea:

- a) Impar. b) Par.

Respuesta abierta.



Funciones

010 Justifica si estas funciones son simétricas.

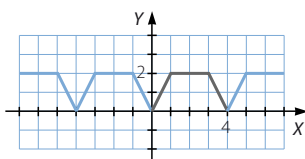
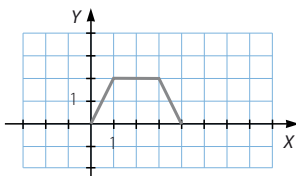
a) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$

b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 3}$

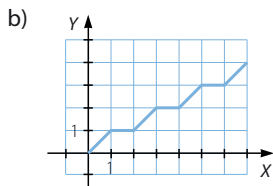
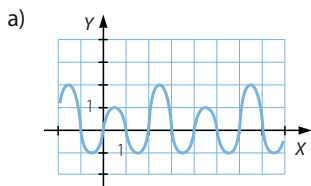
a) $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 2}{(-x)^2} = \frac{x^4 + 2}{x^2} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

b) $g(-x) = \sqrt{(-x)^3 - 3} = \sqrt{-x^3 - 3} \rightarrow g(x)$ no es simétrica.

011 Representa una función periódica tal que el período lo determine esta gráfica.



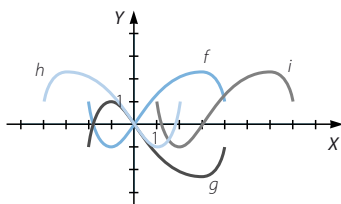
012 Razona si las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.



a) La función es periódica y su período es 4.

b) La función no es periódica, porque la gráfica no se repite.

013 Teniendo en cuenta la gráfica de $y = f(x)$, identifica a qué función corresponde cada una de las gráficas que aparecen en la figura.

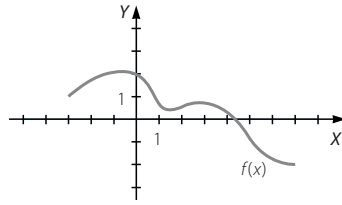


$g(x) = -f(x)$

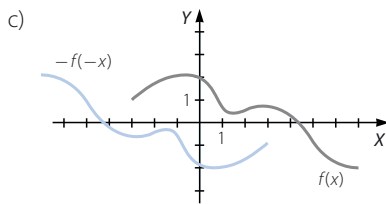
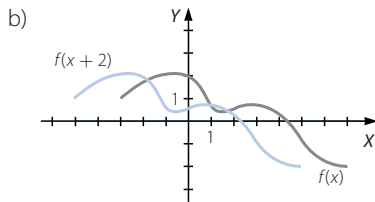
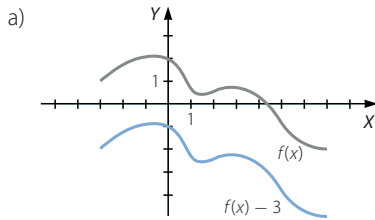
$h(x) = f(-x)$

$i(x) = f(x - 3)$

014 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, representa estas funciones.



a) $y = f(x) - 3$ b) $y = f(x + 2)$ c) $y = -f(-x)$



015 Determina el valor de las estas funciones en el punto $x = -5$,

si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \frac{x + 3}{x}$.

a) $(f - g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f - g)(x) = x^2 - 3 - \frac{x + 3}{x}$ $(f - g)(-5) = (-5)^2 - 3 - \frac{-5 + 3}{-5} = \frac{108}{5}$

b) $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 3) \cdot \left(\frac{x + 3}{x}\right) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}{x}$

$(f \cdot g)(-5) = \frac{(-5)^3 + 3(-5)^2 - 3(-5) - 9}{-5} = \frac{44}{5}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 3}{\frac{x + 3}{x}} = \frac{x^3 - 3x}{x + 3}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(-5) = \frac{(-5)^3 - 3(-5)}{-5 + 3} = 55$

Funciones

016 Teniendo en cuenta que $f(x) = \sqrt{x^5}$ y $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $(f \cdot g)(-4)$ b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

No existe $(f \cdot g)(-4)$, porque $\sqrt{(-4)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^5}}{\frac{x^2 + 3}{x + 1}} = \frac{(x + 1)\sqrt{x^5}}{x^2 + 3}$

No existe $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

017 Determina el valor de la composición de funciones que se indica en cada apartado, en $x = -4$, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x - 1}{x}$.

a) $(f \circ g)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$
b) $(g \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$

b) $(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g(16) = \frac{15}{16}$

c) $(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = f(16) = 256$

d) $(g \circ g)(-4) = g(g(-4)) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{5}$

018 Si $f(x) = \sqrt{2x^3}$ y $g(x) = x - 4$, halla el valor de estas funciones en los puntos que se indican, determinando primero la composición de funciones correspondiente.

a) $(f \circ g)(5)$ b) $(g \circ f)(5)$

Justifica, a partir de los apartados anteriores, si la composición de funciones es conmutativa.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 4) = \sqrt{2(x - 4)^3}$
 $(f \circ g)(5) = \sqrt{2}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x^3}) = \sqrt{2x^3} - 4$
 $(g \circ f)(5) = \sqrt{250} - 4 = 5\sqrt{10} - 4$

$(f \circ g)(5) \neq (g \circ f)(5) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

019 Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$:

a) Determina $g \circ f$, $f \circ g$ y $g \circ g$.

b) Halla las funciones inversas de $f(x)$ y de $g(x)$, y comprueba que $f \circ f^{-1}$ y $g^{-1} \circ g$ dan la función identidad.

$$a) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{3x + 2}{3x + 3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3 \cdot \frac{x}{x+1} + 2 = \frac{5x + 2}{x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x + 1}$$

$$b) y = 3x + 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x-2}{3} + 2 = x$$

$$y = \frac{x}{x+1} \rightarrow xy + y = x \rightarrow x - xy = y \rightarrow x = \frac{y}{1-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

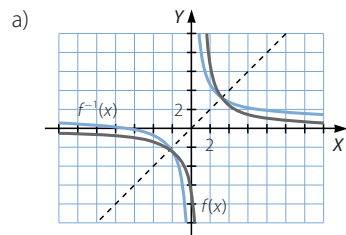
$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = \frac{x}{x+1-x} = x$$

020 Averigua cuál es la función inversa de $f(x) = \frac{7+x}{x}$.

a) Representa las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

b) Comprueba si sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

$$y = \frac{7+x}{x} \rightarrow xy = 7+x \rightarrow xy - x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}$$



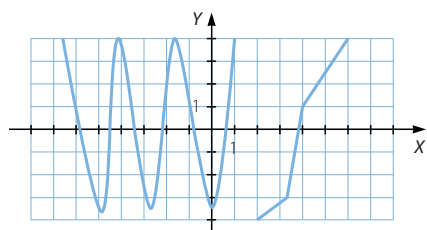
b) Las funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Funciones

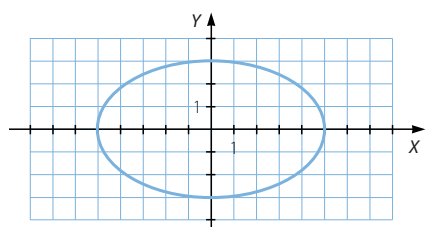
021
●○○

Razona si las siguientes gráficas pueden corresponder a una función.

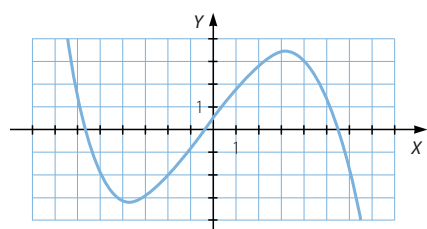
a)



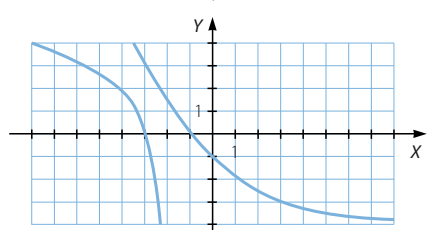
b)



c)



d)



- a) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- b) La gráfica no corresponde a una función, porque a los valores de x situados entre los vértices de la elipse les corresponden dos valores de y .
- c) La gráfica corresponde a una función, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y .
- d) La gráfica no corresponde a una función, porque hay valores de x a los que les corresponden varios valores de y .

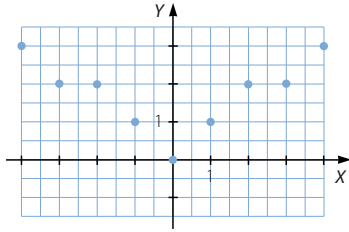
022
●○○

Realiza una tabla y representa estas funciones.

- a) Cada número entero lo relacionamos con su número de divisores positivos.
- b) Cada número real lo relacionamos con su parte entera.
- c) A cada número le hacemos corresponder él mismo menos su valor absoluto.
- d) A cada número le corresponde el valor 2.

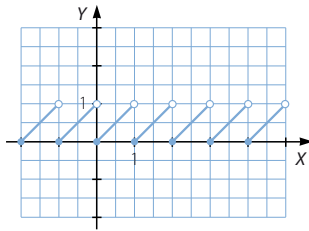
a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	2	1	0	1	2	2	3



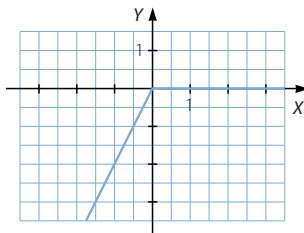
b)

x	-2	-1,6	-1	-0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2



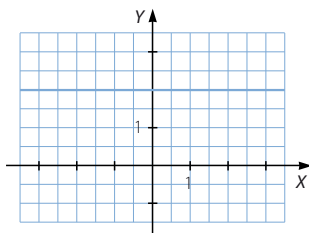
c)

x	-2	-1,6	-1	-0,4	0	0,7	1	1,5	2
$f(x)$	-4	-3,2	-2	-0,8	0	0	0	0	0



d)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2



Funciones

023
•○○

A lo largo de un día medimos la longitud, en metros, de la sombra que proyecta una farola desde el amanecer hasta que anochece.

Las medidas, tomadas cada dos horas, desde las 6:00 h, se muestran a continuación.

0	25	17	5	2
6	19	32	0	

- a) ¿Crees que las tablas definen una función?
b) En caso afirmativo, identifica sus variables.

- a) La tabla define una función porque a cada hora le corresponde una única longitud de la sombra.
b) La variable independiente x corresponde con la hora del día y la variable dependiente y corresponde con la longitud, en metros, de la sombra.



024
•○○

Comprueba si los siguientes puntos están en los dominios de cada función.

a) Los puntos $x = 3$, $x = 2$ y $x = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$.

b) Los puntos $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$ para la función $f(x) = \ln(x-4)$.

c) Los puntos $x = 2$, $x = -2$ y $x = 0$ para la función $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

- a) $\sqrt{3+1} = 2 \rightarrow x = 3 \in \text{Dom } f$
 $\sqrt{2+1} = \sqrt{3} \rightarrow x = 2 \in \text{Dom } f$
 $\sqrt{-5+1} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \rightarrow x = -5 \notin \text{Dom } f$
- b) $\ln(3-4) = \ln(-1) \notin \mathbb{R} \rightarrow x = 3 \notin \text{Dom } f$
 $\ln(4-4) = \ln 0 \notin \mathbb{R} \rightarrow x = 4 \notin \text{Dom } f$
 $\ln(5-4) = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 5 \in \text{Dom } f$
- c) $\frac{3 \cdot 2 - 6}{2 + 2} = 0 \rightarrow x = 2 \in \text{Dom } f$
 $\frac{3(-2) - 6}{-2 + 2} = \frac{-12}{0} \notin \mathbb{R} \rightarrow x = -2 \notin \text{Dom } f$
 $\frac{3 \cdot 0 - 6}{0 + 2} = -3 \rightarrow x = 0 \in \text{Dom } f$

025
•○○

Estudia si los valores de la ordenada, y , están incluidos en los recorridos de estas funciones.

a) Las ordenadas $y = 3$, $y = 2$ e $y = -5$ para la función $f(x) = \sqrt{3x-3}$.

b) Las ordenadas $y = 0$, $y = 30$ e $y = -3$ para la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

c) Las ordenadas $y = 1$, $y = \frac{13}{6}$ e $y = -7$ para la función $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$.

- a) $\sqrt{3x-3} = 3 \rightarrow 3x-3 = 9 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3 \in \text{Im } f$
 $\sqrt{3x-3} = 2 \rightarrow 3x-3 = 4 \rightarrow x = \frac{7}{3} \rightarrow y = 2 \in \text{Im } f$
 $y = -5 \notin \text{Im } f$, porque la raíz no puede tomar valores negativos.

- b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \vee x = 3 \rightarrow y = 0 \in \text{Im } f$
 $x^2 - 5x + 6 = 30 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow x = 8 \vee x = -3 \rightarrow y = 30 \in \text{Im } f$
 $x^2 - 5x + 6 = -3 \rightarrow x^2 - 5x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -11 < 0$
 \rightarrow La ecuación no tiene soluciones $\rightarrow y = -3 \in \text{Im } f$
- c) $\frac{2x-5}{x+2} = 1 \rightarrow 2x-5 = x+2 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 1 \in \text{Im } f$
 $\frac{2x-5}{x+2} = \frac{13}{6} \rightarrow 12x-30 = 13x+26 \rightarrow x = -56 \rightarrow y = \frac{13}{6} \in \text{Im } f$
 $\frac{2x-5}{x+2} = -7 \rightarrow 2x-5 = -7x-14 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = -7 \in \text{Im } f$

026

Determina el dominio de estas funciones.

- a) $f(x) = \frac{x-3}{7}$ b) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$
- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

027

Estudia el dominio de las siguientes funciones.

- a) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \sqrt{x^2-4x+4}$ e) $y = \sqrt{x^2+2x+9}$
 b) $y = \sqrt{2x^2+3x-2}$ d) $y = \sqrt{5-2x}$ f) $y = \sqrt{6+x-x^2}$
- a) $\text{Dom } f = [-3, +\infty)$
 b) $2x^2+3x-2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$
 $\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
 c) $x^2-4x+4 = 0 \rightarrow x = 2$
 $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 d) $\text{Dom } f = \left[-\infty, \frac{5}{2}\right]$
 e) $x^2+2x+9 = 0 \rightarrow \Delta = -32 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.
 $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 f) $6+x-x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$
 $\text{Dom } f = [-2, 3]$

028

Escribe el dominio de las funciones.

- a) $y = \log_4(x-4)$ c) $y = 3^{\ln x}$ e) $y = \ln\left(\frac{10}{4-x}\right)$
 b) $y = \cos(1-x)$ d) $y = \text{sen}(x-\pi)$
- a) $\text{Dom } f = (4, +\infty)$ c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$ e) $\text{Dom } f = (-\infty, 4)$
 b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Funciones

029 ●●● Analiza el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \log_4(5 + x)$

b) $y = 2^{3x-6}$

c) $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = 2 - \operatorname{tg} x$

e) $y = \frac{3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

a) $\operatorname{Dom} f = (-5, +\infty)$

b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

c) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

030 ●●○ Determina el dominio de las funciones.

a) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{8-x}$

b) $y = \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt{x+3}$

c) $y = \sqrt{2x-4} \cdot \sqrt{1-x}$

a) $\operatorname{Dom} f = [-1, 8]$

b) $\operatorname{Dom} f = [-3, +\infty)$

c) $\operatorname{Dom} f = \emptyset$

031 ●●● Estudia el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $y = 5x - 3$

b) $y = 2 + \sqrt{x-1}$

c) $y = \frac{3}{x}$

d) $y = 2 - 4^x$

e) $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}$

f) $y = \frac{2}{x-2}$

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

b) $\operatorname{Dom} f = [1, +\infty)$

$\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$

c) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$

d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} f = (-\infty, 2)$

e) $\operatorname{Dom} f = [-3, 3]$

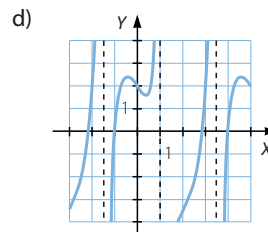
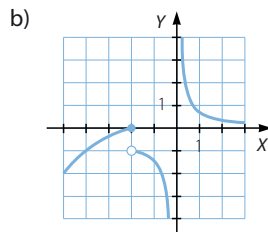
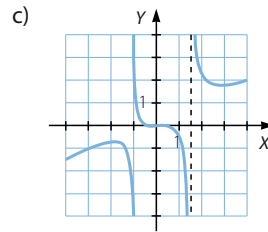
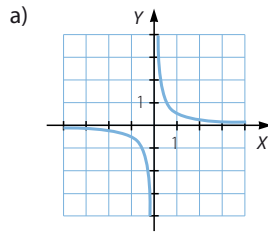
$\operatorname{Im} f = [\sqrt{6}, 2\sqrt{3}]$

f) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} - \{0\}$

032

Estudia las características de las siguientes funciones.



a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

No hay periodicidad.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función no es simétrica ni periódica.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente

en $(-2, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Existe un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Es convexa en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y es cóncava en $(-1, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

La función no es simétrica ni periódica.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1,5; 1; 3,5\}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -1,5) \cup (-1,5; -0,5) \cup (0,5; 1) \cup (1; 3,5) \cup (3,5; 4,5)$ y es decreciente en $(-0,5; 0,5) \cup (4,5; +\infty)$.

Máximo relativo en $x = -0,5$ y en $x = 4,5$ y mínimo relativo en $x = 0,5$.

Es cóncava en $(-\infty; -1,5) \cup (0, 1) \cup (1; 3,5)$ y es convexa en $(-0,5; 0) \cup (3,5; 5)$.

La función no es simétrica ni periódica.

Funciones

033
●●○

Considera la función que relaciona el tiempo, en días, con la superficie visible de la Luna.

- ¿Es una función periódica?
- En caso afirmativo, indica el período.
 - Al depender la superficie visible de las fases en la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, la función es periódica.
 - El período es de 28 días.

034
●●○

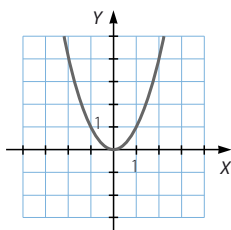
Estudia las simetrías de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

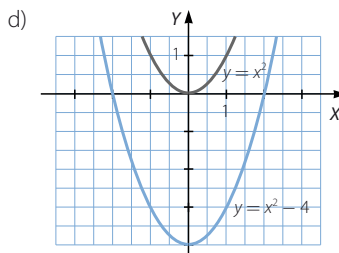
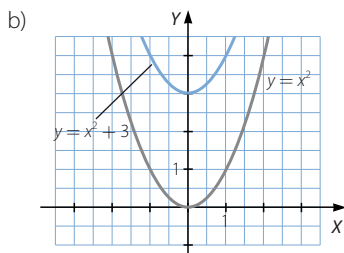
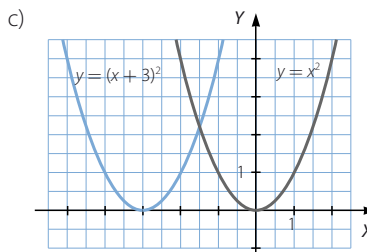
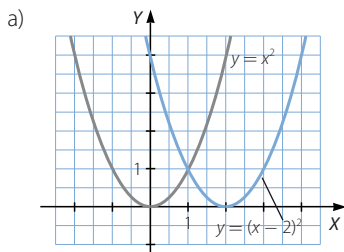
035
●●○

Dada la gráfica de la función $y = x^2$:



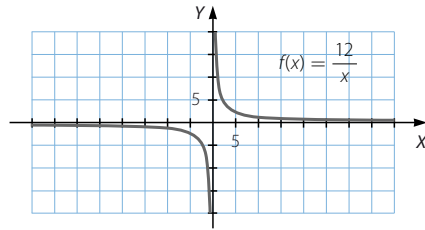
representa estas funciones.

- $y = (x - 2)^2$
- $y = x^2 + 3$
- $y = (x + 3)^2$
- $y = x^2 - 4$



036

A partir de la siguiente función:



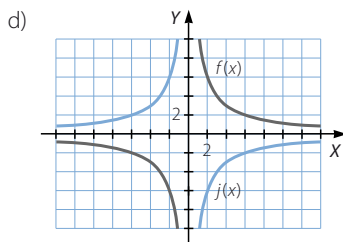
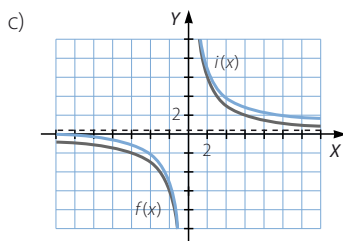
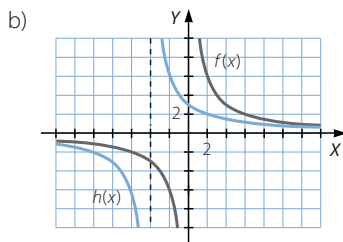
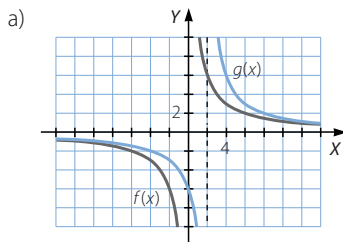
obtén la gráfica de estas funciones.

a) $g(x) = \frac{12}{x-2}$

b) $h(x) = \frac{12}{x+4}$

c) $i(x) = \frac{12}{x} + 1$

d) $j(x) = -\frac{12}{x}$

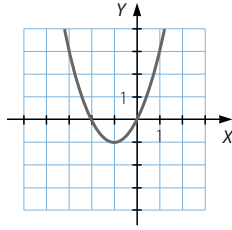


Funciones

037
●●○

Con la gráfica de esta función:

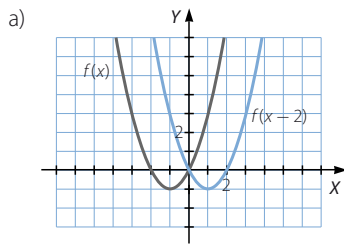
$$f(x) = x^2 - 2x$$



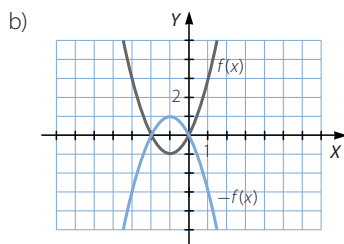
representa gráficamente las siguientes funciones.

- a) $f(x - 2)$ b) $-f(x)$ c) $f(x + 1)$ d) $f(x) + 2$

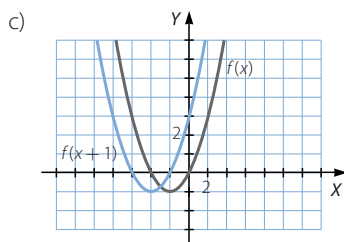
Razona cómo lo haces y calcula su expresión algebraica.



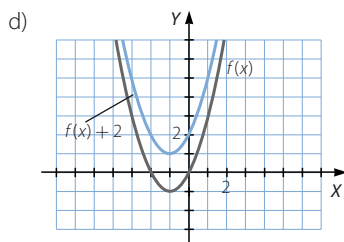
$$f(x - 2) = (x - 2)^2 + 2(x - 2) = x^2 - 2x$$



$$-f(x) = -x^2 - 2x$$



$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$$

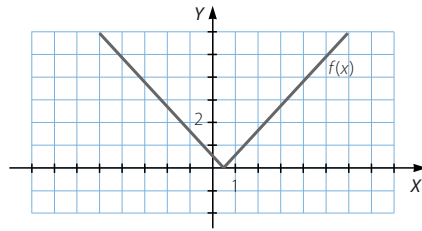


$$f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$$

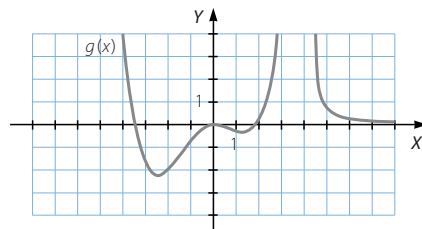
038

A partir de cada gráfica, dibuja la gráfica de las funciones que se indican.

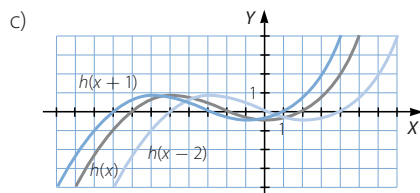
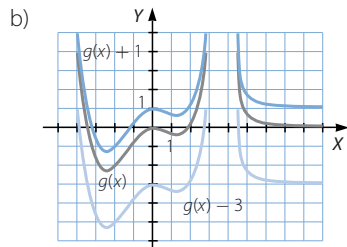
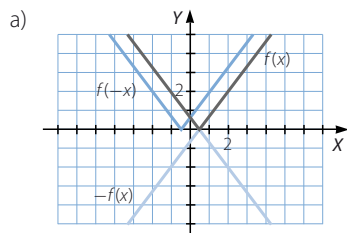
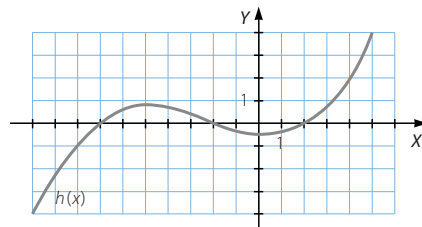
a) $f(-x)$ y $-f(x)$



b) $g(x) + 1$ y $g(x) - 3$



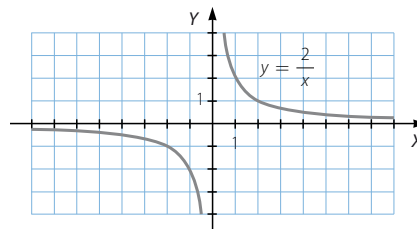
c) $h(x + 1)$ y $h(x - 2)$



Funciones

039
●●○

La gráfica pertenece a la función $y = \frac{2}{x}$.



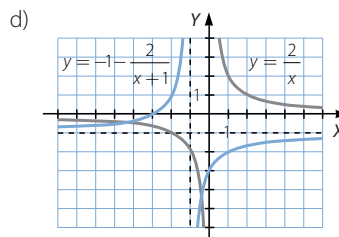
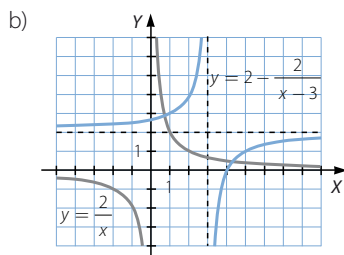
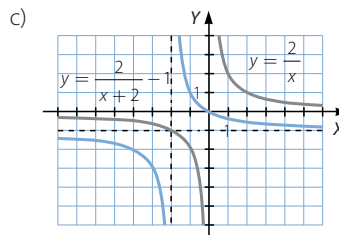
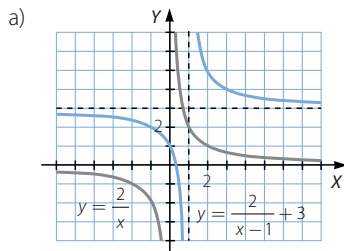
Construye a partir de ella la gráfica de las funciones.

a) $y = \frac{2}{x-1} + 3$

c) $y = \frac{2}{x+2} - 1$

b) $y = 2 - \frac{2}{x-3}$

d) $y = -1 - \frac{2}{x+1}$



040
●●○

Dada la función $f(x) = \frac{8}{x}$, determina la expresión algebraica de estas funciones y represéntalas.

a) $f(x-3)$

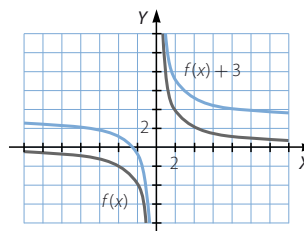
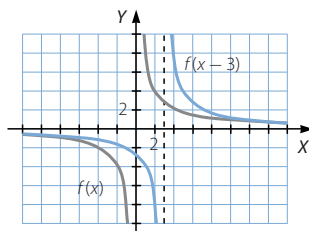
b) $f(x)+3$

c) $f(-x)$

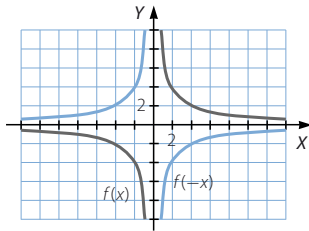
d) $-f(x)$

a) $f(x-3) = \frac{8}{x-3}$

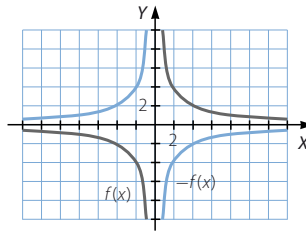
b) $f(x)+3 = \frac{8}{x} + 3$



c) $f(-x) = -\frac{8}{x}$



d) $-f(x) = -\frac{8}{x}$



041

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g(x) = \frac{3}{x^2-1}$$

calcula.

- a) $(f+g)(5)$ c) $(f \cdot g)(0)$ e) $(f \cdot f)(2)$ g) $(g-f)(3)$ i) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$
 b) $(f-g)(3)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ f) $(g+f)(5)$ h) $(f+f \cdot g)(0)$ j) $f^2(2)$

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{3}{x^2-1}$

$(f+g)(5) = \sqrt{7} + \frac{1}{8}$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \frac{3}{x^2-1}$

$(f-g)(3) = \sqrt{5} - \frac{3}{8}$

c) $(f \cdot g)(x) = \frac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

$(f \cdot g)(0) = -3\sqrt{2}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x^2-1)\sqrt{x+2}}{3}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = 0$

e) $(f \cdot f)(x) = x+2$

$(f \cdot f)(2) = 4$

f) $(g+f)(x) = \frac{3}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$

$(g+f)(5) = \frac{1}{8} + \sqrt{7}$

g) $(g-f)(x) = \frac{3}{x^2-1} - \sqrt{x+2}$

$(g-f)(3) = \frac{3}{8} - \sqrt{5}$

h) $(f+f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$

$(f \cdot g)(0) = -2\sqrt{2}$

i) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{3}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$ no es real, porque el denominador de una fracción no puede ser igual a 0.

j) $(f^2)(x) = x+2$ $(f^2)(2) = 4$

Funciones

042
•••

Calcula el dominio de las funciones.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad g(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Utiliza el resultado para calcular el dominio de las siguientes funciones.

a) $(f + g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
b) $(f \cdot g)(x)$ d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Dom } g = [-5, 5]$$

$$\text{a) } \text{Dom } (f + g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$$

$$\text{b) } \text{Dom } (f \cdot g) = [-5, -2] \cup [2, 5]$$

$$\text{c) } \text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = (-5, -2] \cup [2, 5)$$

$$\text{d) } \text{Dom } \left(\frac{g}{f}\right) = [-5, -2) \cup (2, 5]$$

043
•••

Dadas las funciones:

$$m(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad n(x) = x + 6 \quad p(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

define las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(m + n)(x)$ c) $\left(\frac{n}{m}\right)(x)$
b) $(n + p)(x)$ d) $(m \cdot n + p)(x)$

$$\text{a) } (m + n)(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x + 6$$

$$\text{Dom } (m + n) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{b) } (n + p)(x) = x + 6 + \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$\text{Dom } (n + p) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{c) } \left(\frac{n}{m}\right)(x) = \frac{x + 6}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\text{Dom } \left(\frac{n}{m}\right) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$\text{d) } (m \cdot n + p)(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot (x + 6) + \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$\text{Dom } (m \cdot n + p) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

044
●○○

Dadas las funciones:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula las composiciones de funciones.

- a) $f \circ g$ d) $g \circ f$
 b) $g \circ h$ e) $h \circ g$
 c) $h \circ f$ f) $f \circ h$

Determina el valor de cada función para $x = 3$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2^{x^2}$

$$(f \circ g)(3) = 512$$

b) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$

$$(g \circ h)(3) = \frac{1}{9}$$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2^x) = \frac{1}{2^x}$

$$(h \circ f)(3) = \frac{1}{8}$$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^{2x}$

$$(g \circ f)(3) = 64$$

e) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \frac{1}{x^2}$

$$(h \circ g)(3) = \frac{1}{9}$$

f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{\frac{1}{x}}$

$$(f \circ h)(3) = \sqrt[3]{2}$$

045
●○○Comprueba con las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3x - 2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = 3\sqrt{x+1} - 2$$

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) \rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$$\text{Dom}(f \circ g) = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = [-1, +\infty)$$

Funciones

046
●●●

Explica de qué manera hay que componer las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad g(x) = 5x + 1 \quad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones.

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$ b) $n(x) = 25x + 6$ c) $p(x) = \frac{x+11}{x+1}$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 + 4}) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1 = m(x)$

b) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1 = 25x + 6 = n(x)$

c) $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{2}{x+1}\right) = \frac{10}{x+1} + 1 = \frac{x+11}{x+1} = p(x)$

047
●●○

Determina $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ en los pares de funciones para comprobar si son inversas o no.

a) $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ y $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = x^2 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

a) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 1 = x + 2$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 1) = \frac{1}{3}(3x - 1) + 1 = x + \frac{2}{3}$

Las funciones no son inversas.

b) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x}$

Las funciones no son inversas.

c) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x$

Las funciones son inversas.

d) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) = x$

Las funciones son inversas.

e) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2}) = x - 2 + 2 = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2} - 2 = x$

Las funciones son inversas.

048

Calcula la función inversa de cada función.

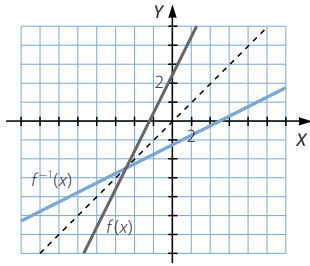
a) $y = 2x + 5$

b) $y = \frac{3-x}{2}$

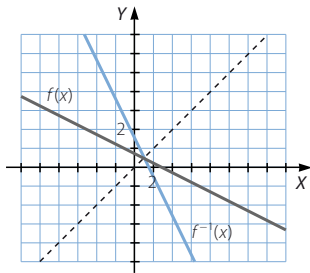
c) $y = \sqrt[3]{2x-3}$

Comprueba que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

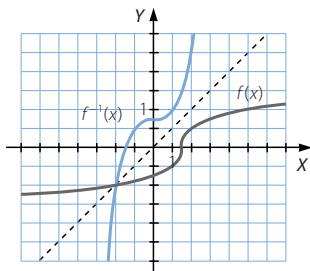
a) $y = 2x + 5 \rightarrow x = \frac{y-5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$



b) $y = \frac{3-x}{2} \rightarrow x = 3-2y \rightarrow f^{-1}(x) = 3-2x$



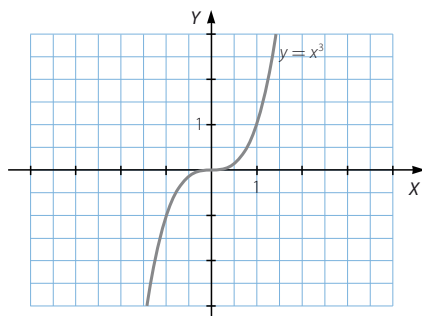
c) $y = \sqrt[3]{2x-3} \rightarrow x = \frac{y^3+3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{2}$



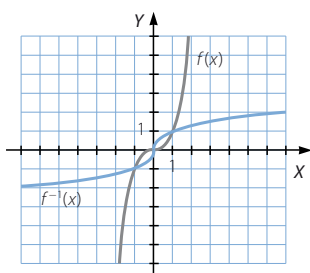
Funciones

049
○○○

Dada la gráfica de la función $y = x^3$:



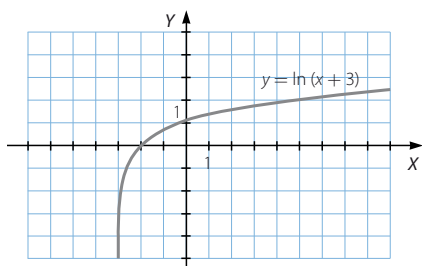
dibuja la gráfica de su función inversa.



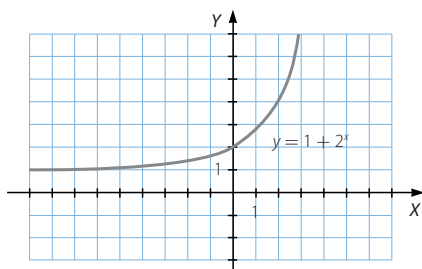
050
○○○

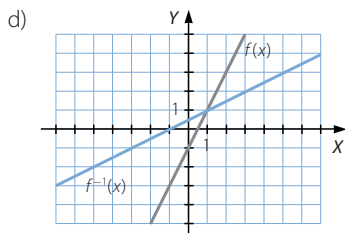
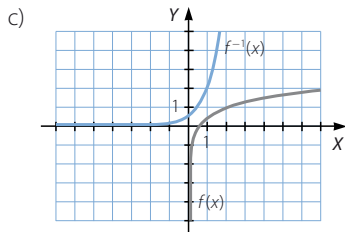
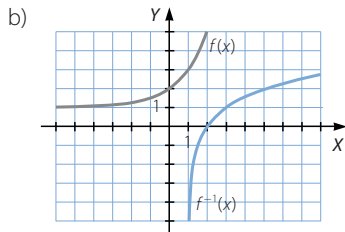
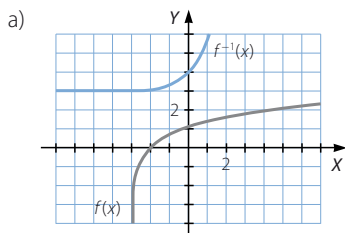
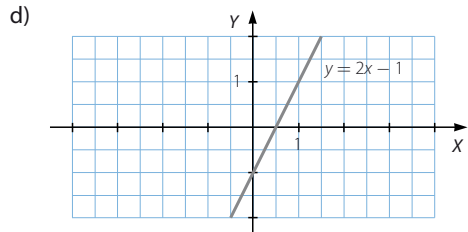
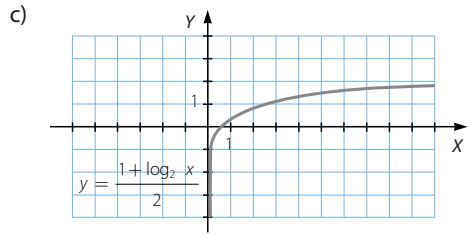
Dibuja las funciones inversas.

a)



b)





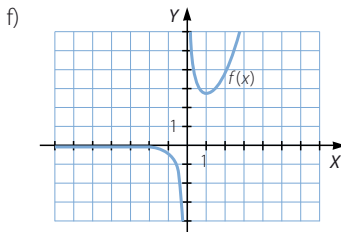
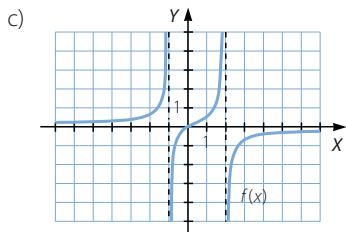
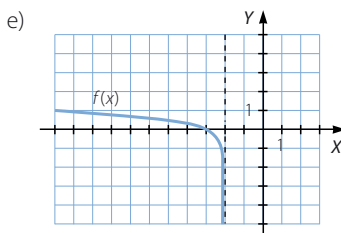
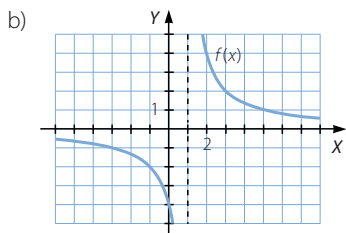
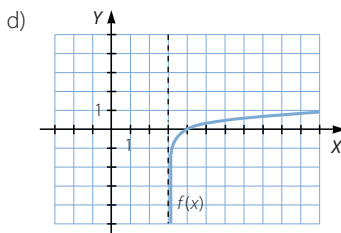
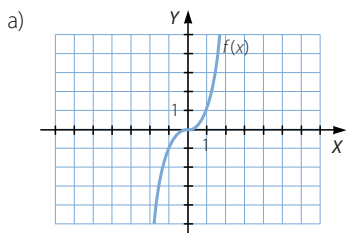
Funciones

051
●○○

Dibuja funciones que cumplan estas propiedades.

- Su dominio y su recorrido son \mathbb{R} .
- Su dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Es creciente y su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.
- Es logarítmica y su dominio es $(3, +\infty)$.
- Es logarítmica y su dominio es $(-\infty, -2)$.
- Es exponencial y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Respuesta abierta.

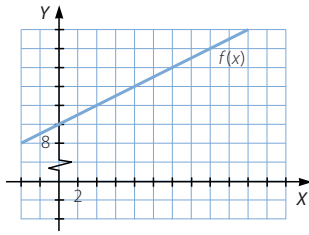


052
●○○

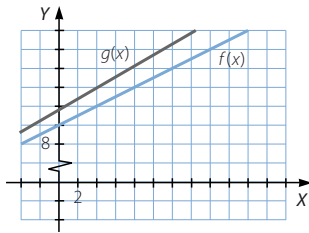
En una vivienda pagan 10 euros de gasto fijo y 0,50 euros por cada kilovatio consumido a la empresa que les suministra electricidad.

- Obtén una expresión de la relación que existe entre el consumo y el precio y represéntala.
- Si a esta cantidad hay que aumentarle el 16% de IVA, ¿cómo será la ecuación? ¿Qué variación sufre la gráfica?

a) $f(x) = 10 + 0,5x$



b) $g(x) = (10 + 0,5x) \cdot 1,16 = 11,6 + 0,58x$



La gráfica es otra recta con mayor pendiente que la primera.

053

Halla el dominio de las funciones del tipo $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, siendo n un número natural.

Si n es impar: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

Si n es par: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

054

El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la fórmula:

$$r = at^2 + 2,8t + 8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo;
 a es un número fijo, que se denomina coeficiente de atenuación, y r es el nivel de ruido, medido en decibelios.



La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios. ¿Cuál es el coeficiente de atenuación? ¿Cuántos decibelios producirá a los ocho años?

$$27 = a \cdot 4^2 + 2,8 \cdot 4 + 8 \rightarrow 16a = 7,8 \rightarrow a = 0,4875$$

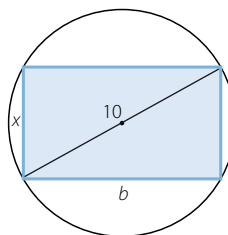
$$\text{A los ocho años producirá: } r = 0,4875 \cdot 8^2 + 2,8 \cdot 8 + 8 = 61,6 \text{ decibelios}$$

Funciones

055
●●○

En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de lado x .

- Expresa el área en función de x . ¿Cuál es su dominio?
- Realiza un tanteo para determinar el máximo valor que puede tomar esa función. ¿Cuánto medirán los lados del rectángulo en ese caso? ¿Qué tanto por ciento de la superficie del círculo ocupa el rectángulo?



- Por el teorema de Pitágoras: $10^2 = b^2 + x^2 \rightarrow b = \sqrt{100 - x^2}$
El área del rectángulo viene dada por la función: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$
- Al ser x la medida de un lado, el dominio de la función es: $\text{Dom } f = [0, 10]$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	9,95	19,59	28,62	36,66	43,3	48	49,98	48	39,23	0

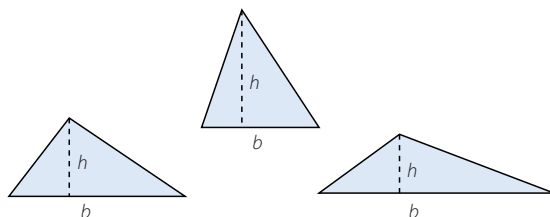
El máximo valor del área es, aproximadamente, $49,98 \text{ cm}^2$. En ese caso, el lado x mide 7 cm. Así, el otro lado mide: $b = \sqrt{51} = 7,14 \text{ cm}$

El área del círculo mide: $A = \pi r^2 = 78,53 \text{ cm}^2$

Como $\frac{49,98}{78,53} = 0,6364$, el área del rectángulo ocupa el 63,64 % de la superficie del círculo.

056
●●○

Considera los triángulos cuya superficie mide 5.

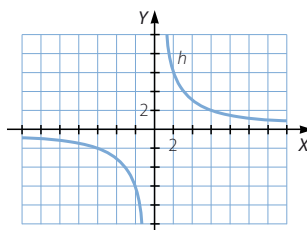
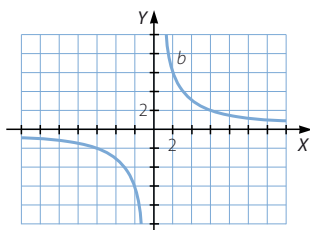


- Escribe la expresión algebraica que relaciona la base en función de la altura en estos triángulos.
- ¿Cuál es la función que relaciona la altura en función de la base?
- Representa ambas funciones.

a) $b = \frac{2A}{h}$

b) $h = \frac{2A}{b}$

c)



Las dos gráficas son iguales.

PARA FINALIZAR...

057 Sean las funciones $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Comprueba que se cumple que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 - [f(x)]^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \\ &= \frac{2+2}{4} = 1 \end{aligned}$$

058 Calcula las funciones inversas de:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow 2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$

Si $z = e^x$:

$$2y = z - \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$\text{e } y = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1}).$$

Si $z = e^x$:

$$2y = z + \frac{1}{z} \rightarrow z^2 - 2yz + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Por tanto, las funciones inversas son de la forma: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\text{e } y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

059 Si la función definida por $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, con $x \neq -\frac{3}{2}$, verifica que $f[f(x)] = x$, ¿cuánto vale c ?

$$f(f(x)) = f\left(\frac{cx}{2x+3}\right) = \frac{c \cdot \frac{cx}{2x+3}}{2 \cdot \frac{cx}{2x+3} + 3} = \frac{c^2x}{2cx + 6x + 9} = x \rightarrow c^2x = 2cx^2 + 6x^2 + 9x$$

$$\rightarrow c^2x - 2cx^2 - 6x^2 - 9x = 0 \rightarrow c = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 + 24x^3 + 36x^2}}{2x} =$$

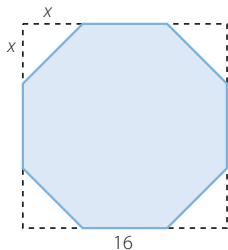
$$= x \pm \sqrt{x^2 + 6x + 9} = x \pm \sqrt{(x+3)^2} = x \pm (x+3)$$

$$\text{Si } c = 2x + 3: f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{2x + 3} = x$$

$$\text{Si } c = -3: f(x) = \frac{-3x}{2x + 3}$$

060

En un cuadrado de 16 cm de lado se suprime, de cada esquina, un triángulo rectángulo e isósceles de cateto x . Expresa el área y el perímetro del polígono resultante en función de x . ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido?

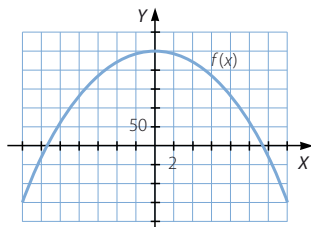


El área de la figura viene dada por la función: $f(x) = 16^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 256 - 2x^2$

La hipotenusa de los triángulos mide: $a^2 = x^2 + x^2 \rightarrow a = \sqrt{2}x$

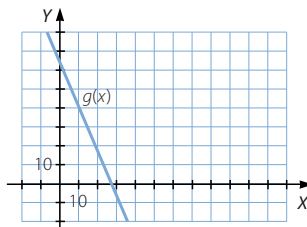
El perímetro de la figura viene dado por la función:

$$g(x) = 4\sqrt{2}x + 4(16 - 2x) = (4\sqrt{2} - 8)x + 64$$



$$\text{Dom } f = [0, 8\sqrt{2}]$$

$$\text{Im } f = [0, 256]$$



$$\text{Dom } g = [0, 8\sqrt{2} + 16]$$

$$\text{Im } g = [0, 64]$$

061

Un grupo de alumnos de 1.º Bachillerato pide presupuesto en dos agencias de viajes para realizar una excursión.

La primera agencia les hace la siguiente propuesta.

- Si el número de alumnos que va a la excursión es 40 o menos, les cobrará 200 € por alumno.
- Si el número de alumnos es superior a 40 le descontará un 10% a cada uno de los alumnos que se inscriba.

La oferta de la segunda agencia es:

- Si completan un autobús, con capacidad para 60 personas, el precio será de 150 € por persona. Si alguno de los autobuses no está completo, se incrementará el precio en un 1% por cada persona que falte para completarlo.

¿Qué agencia les conviene más?

Un descuento del 10% en el precio de 200 € significa un precio de: $200 \cdot 0,9 = 180$ €

Así, la función que representa la propuesta de la primera agencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 180x & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

El incremento de un 1% por cada persona que falte significa que el precio será:

$$150 \cdot \left(1 + \frac{60-x}{100}\right)x = 150x + 1,5(60x - x^2) = 240x - 1,5x^2$$

La función que representa la propuesta de la segunda agencia es:

$$g(x) = \begin{cases} 240x - 1,5x^2 & \text{si } 0 \leq x < 60 \\ 150x & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

Los puntos de intersección de ambas funciones son:

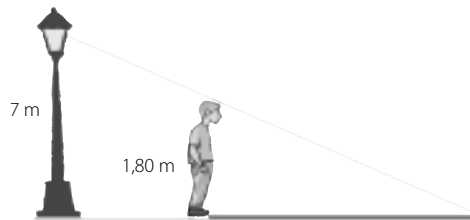
- Si $0 \leq x \leq 40 \rightarrow 200x = 240x - 1,5x^2 \rightarrow 1,5x^2 - 40x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{80}{3} = 26,6 \end{cases}$
- Si $40 < x < 60 \rightarrow 180x = 240x - 1,5x^2 \rightarrow 1,5x^2 - 60x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$
- Si $x \geq 60 \rightarrow 180x = 150x \rightarrow x = 0$

Por tanto, la primera agencia resulta más conveniente si el número de alumnos es menor o igual a 26. A partir de 27 alumnos, es más económica la segunda agencia.

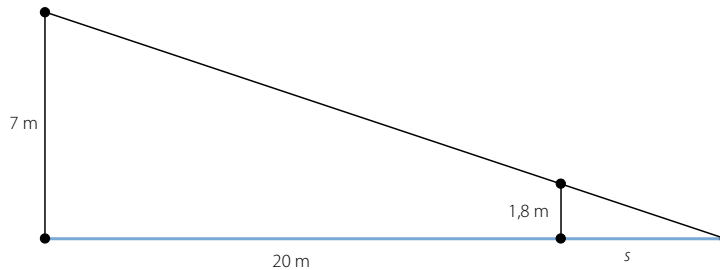
- 062** Una farola tiene 7 m de altura. En su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a andar en línea recta, alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s.

Al cabo de 10 segundos, ¿cuál será la longitud de su sombra?

Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo, t , que se camina.



Al cabo de 10 segundos, la persona ha recorrido 20 m.



Como la farola y la persona forman ángulos rectos con el suelo, sus alturas determinan dos lados paralelos de triángulos que se encuentran en posición de Tales.

$$\frac{7}{1,8} = \frac{20}{s} \rightarrow s = \frac{1,8 \cdot 20}{7} = 5,14 \text{ m}$$

La función que expresa la longitud de la sombra en función del tiempo es:

$$f(t) = \frac{1,8 \cdot 2t}{7} = \frac{3,6t}{7}$$