

## UNIDAD 10. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

## LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

C-07-01

1.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

c)  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 4$

d)  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 5$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$

2.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 3 - \frac{x}{2} \right) = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{x-3} = -\frac{1}{2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2) = -3$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3}{1 - x - 2x^5} = -3$

e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{-3x - x^3} = 2$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{4x-1} = \frac{1}{e}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\log_5(x^5 - 7)) = 2$

h)  $\lim_{x \rightarrow e} (-3 \ln x^2) = -6$

i)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -4$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$

4.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

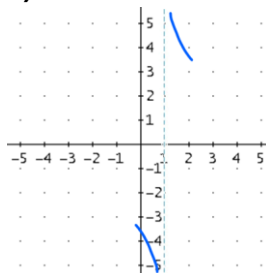
d)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$

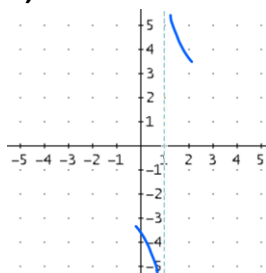
f)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

5.

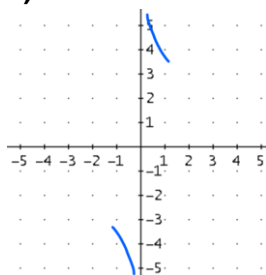
a)



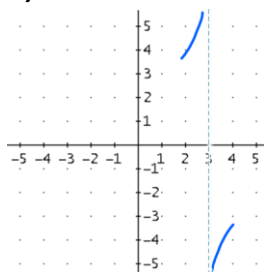
b)



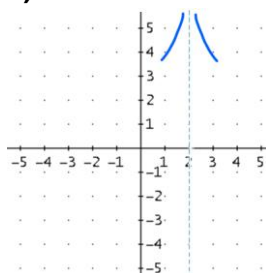
c)



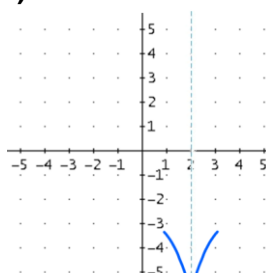
d)



e)



f)



## LÍMITES DE FUNCIONES EN EL INFINITO

1.

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -6$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$

2.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 = \infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 - 3x^5 = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 - 2x^3 = \infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - x^3 = \infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x^3 + x^2} = \infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{1 - x - x^5} = 0$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - x^2}{1 + x - x^5} = -1$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - x^2 - x}{1 - 3x^3} = -2$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5}{-3x^3 + x^2} = \infty$

3.  $d < c < e < a < b < f$

4.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = \infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{e^x} = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2}{e^x} = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^5}{3x} = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\ln(-2x^5)} = -\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^5 - x^2}{x^3 - x^2 - 1} \right)^{\frac{3x}{x+1}} = \infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^5 - x} \right)^{x^2} = \infty$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)^{x+1} = 0$

## INDETERMINACIONES

1.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2}{x^3 + 5x^2} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{8 - 2x} = -2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{-x^2 + 3x - 2} = -1$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 - 13x^3 + 57x^2 - 95x + 50}{x - 5} = 0$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = +\infty \end{cases}$$

2.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3} = -\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{x^2 - 2x - 1} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 3x - 1}{\sqrt{4x^4 - x^3 - 3}} = 3$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x^2 + 1} - (x - 2) = +\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}$$

3.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x - 1} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$$

## CONTINUIDAD

C-07-04

1. Discontinua de salto finito en  $x = -4$  y discontinua de salto infinito en  $x = 3$ .

2.

a) Continua en  $\mathbb{R}$  por ser un polinomio.

b) Discontinua de salto infinito en  $x = 0$ .

c) Discontinua de salto infinito en  $x = -2$  y en  $x = 2$ .

d) Discontinua de salto infinito en  $x = -1$  y en  $x = 3$ .

3.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow$  Discontinuidad de salto finito

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow$  Continua

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 \neq 1 = f(1) \rightarrow$  Discontinuidad evitable

d)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty$   $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \rightarrow$  Discontinuidad de salto infinito

4.

$$\text{a) } k = \frac{7}{2}$$

$$\text{b) } k = \frac{4}{17}$$

5.

$$\text{a) } a = 1, b = 2$$

$$\text{b) } a = \frac{\pi}{6}, b = -\frac{\pi}{3}$$

## APLICACIONES DE LOS LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES A LAS CIENCIAS SOCIALES

C-07-05

1. Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) - p(t) = 1$  podemos afirmar que la diferencia se estabilizará, por lo que no habrá peligro de extinción de estas especies.

$$2. \text{ Calculamos el límite: } \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \frac{2t^2 + 3}{2t + 5} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2 - t + 2}{2t^2 + 7t + 5} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Es decir, a largo plazo el beneficio tenderá a estabilizarse en 1,5 millones de euros anuales.

3. La función no puede calcularse para  $t = 3$ , pero sí podemos hallar el límite cuando nos acercamos a 3 (por la izquierda).

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{5t - 15}{-t^2 + 6t - 9} = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{5(t - 3)}{-(t - 3)^2} = \lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{5}{-(t - 3)} = +\infty$$

La presión aumentará indefinidamente conforme nos acercamos a los 3 minutos, por lo que el recipiente estallará.

4. a) Si estacionas "algo menos de una hora":

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1,2x = 1,2$$

Si estacionas «algo más de una hora»:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (0,1x^2 + 0,3x + 0,6) = 1$$

Hay una incoherencia en el resultado: Además de no ser un precio continuo, el precio del estacionamiento por «algo menos de una hora» sería mayor que el precio por estacionar «algo más de una hora».

b) Como  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2,4$  en este caso sí existe coherencia y continuidad en el precio al cambiar la tarifa.

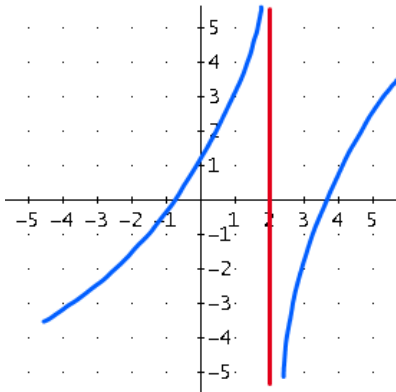


VOCABULARIO MATEMÁTICO

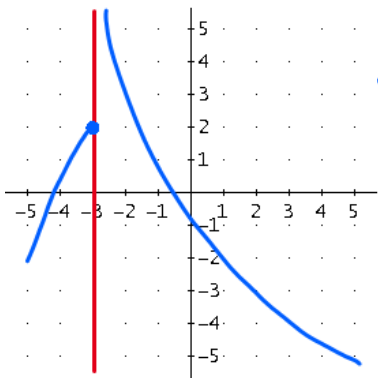
Todos los apartados admiten varias soluciones. Ejemplos:

1.

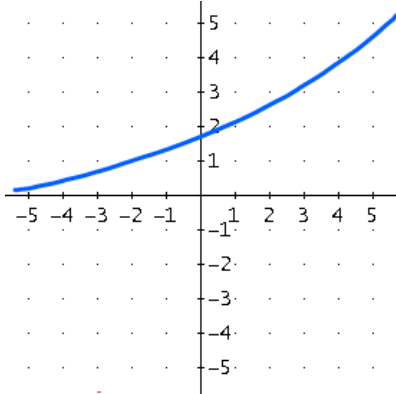
a)



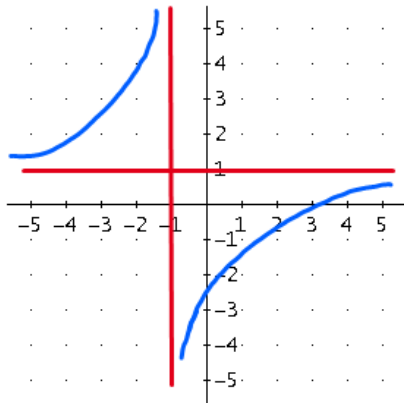
b)



c)



d)



•

a)  $f(x) = \frac{1}{2-x}$

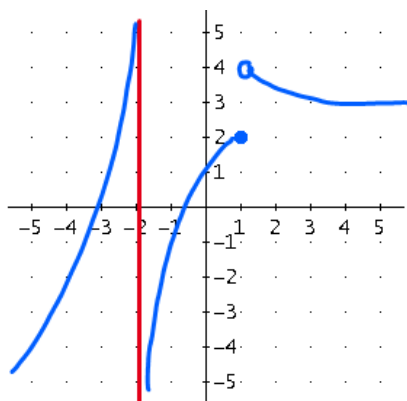
b)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{1}{x+3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$  o  $f(x) = xe^x$

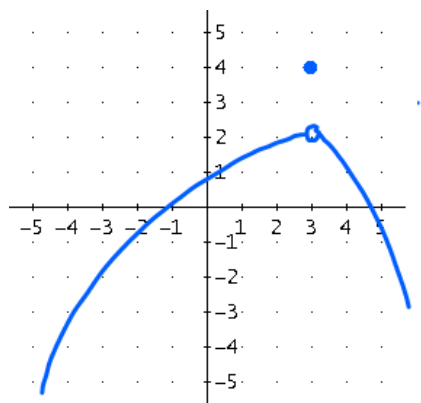
d)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

2.

A

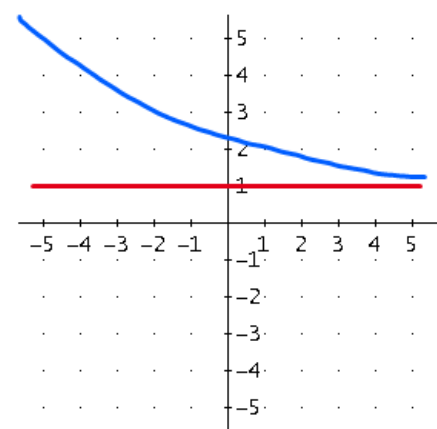


**B**

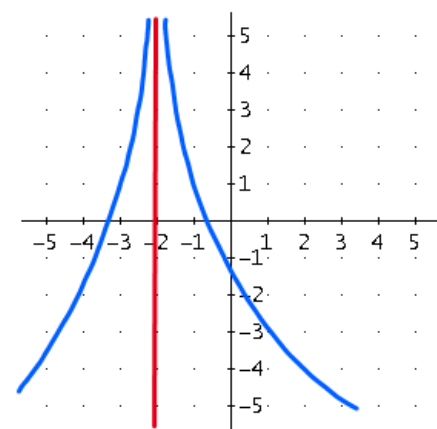


**3.**

**A**



**B**



## LÍMITES CON WIRIS

C-07-07

1.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 3 - \frac{x}{2} \right) = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos \left( \frac{3x}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

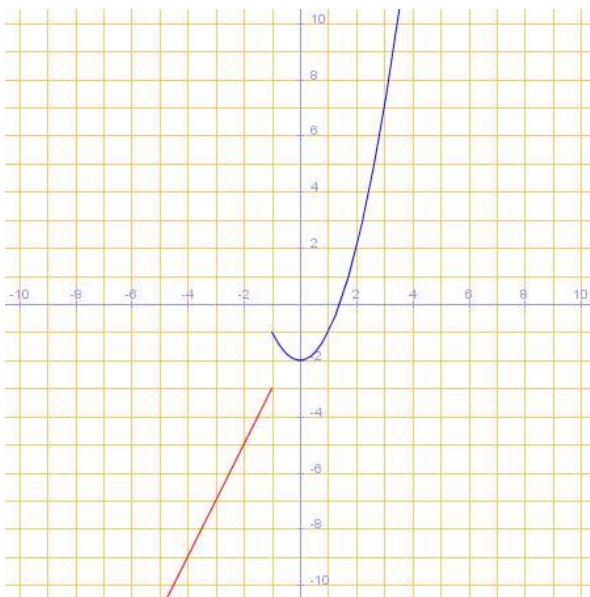
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5}{-3x^3 + x^2} = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2}{x^3 + 5x^2} = -\frac{2}{5}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x^2 + 1} - (x - 2) = +\infty$

2. Discontinua de salto finito.



## TEST MATEMÁTICO

C-07-08

1. d
2. a
3. c
4. c
5. d
6. b
7. a
8. d
9. d
10. c