

2

Potencias y radicales

POTENCIAS
DE EXPONENTE ENTERO

NOTACIÓN CIENTÍFICA

RADICALES

EQUIVALENTES

SEMEJANTES

OPERACIONES
CON RADICALES

SUMA Y RESTA

PRODUCTO
Y COCIENTE

POTENCIA Y RAÍZ

RACIONALIZACIÓN

DENOMINADOR
CON RADICAL

DENOMINADOR
CON BINOMIO RADICAL

Prueba de valor

No eran buenos tiempos para la gente corriente, las ciudades estado italianas se hundían en un río de intrigas, traiciones y violentas guerras, del que no se salvaban ni siquiera los Estados Pontificios.

En una de estas ciudades, Brescia, Nicolo Fontana se dispuso a contar la historia de su herida, una fea cicatriz que surcaba su mandíbula.

—Fue hace dos años, en 1512, la ciudad había caído y grupos de soldados descontrolados campaban a sus anchas por todas partes.

—Mi madre corría delante de mí en dirección a la iglesia. —La narración se detuvo mientras aconsejaba a los más pequeños—. No lo olvidéis nunca: ¡en caso de peligro el único sitio seguro es la iglesia!

Tras la obligada pausa, Nicolo continuó con su dramática escena.

—De repente, mi madre tropezó y un soldado se acercó a ella blandiendo la espada. La tragedia parecía irremediable. En ese momento, sin dudarlo ni un instante, salté sobre él para defenderla y rodamos por el suelo. —Nicolo hacía aspavientos luchando con el imaginario enemigo—. Pero era más fuerte que yo, se revolvió y de un golpe de espada tajó mi cara como aquí veis. La herida tardó tiempo en curarse y me dejó tartamudo, pero lo doy por bien empleado.

El muchacho, Nicolo Fontana, apodado *Tartaglia*, se convirtió en uno de los matemáticos más importantes del siglo XVI.

Tartaglia encontró la solución de una ecuación cúbica mediante radicales. Discute el valor numérico de estos radicales según el valor de a : $\sqrt[3]{a}$ y \sqrt{a} .

Para $a < 0$:

\sqrt{a} **no existe.**

$\sqrt[3]{a}$ **tiene un único valor.**

Para $a = 0$:

$\sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = 0$

Para $a > 0$:

\sqrt{a} **tiene dos valores, que son opuestos.**

$\sqrt[3]{a}$ **tiene un único valor.**



Potencias y radicales

EJERCICIOS

001 Simplifica y calcula.

a) $\underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{60 \text{ veces}}$

a) z^{60}

b) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{150 \text{ veces}}$

b) x^{150}

c) $(-3)^{-2}$

c) $\frac{1}{3^2}$

d) -3^{-2}

d) $-\frac{1}{3^2}$

002 Escribe el inverso de los siguientes números como potencia de exponente entero.

a) 2

a) $\frac{1}{2}$

b) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) 2^2

c) $\frac{1}{2^2}$

d) -2^{-2}

d) -2^2

003 Expresa estas fracciones como potencias de exponentes enteros.

a) $\frac{225}{64}$

a) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{2^6} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-6}$

b) $\frac{22}{121}$

b) $\frac{2 \cdot 11}{11^2} = \frac{2}{11} = 2^1 \cdot 11^{-1}$

c) $-\frac{56}{125}$

c) $\frac{2^3 \cdot 7}{5^3} = 2^3 \cdot 7^1 \cdot 5^{-3}$

004 Indica cuánto vale $(-1)^n$ para los valores positivos y negativos de n .

Para ello, comienza dando valores pequeños y obtén una regla general.

Independientemente de si n es positivo o negativo, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

005 Aplica las propiedades de las potencias, y expresa el resultado como potencia de exponente positivo.

a) $8^{-3} \cdot 8^{-6}$

b) $\left(\frac{5^{-8}}{5^{-2}}\right)^{-2}$

c) $(8 \cdot 4)^{-4}$

d) $\left(\frac{15}{72}\right)^{-3}$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}$

f) $(24^{-21})^2$

Indica qué propiedad has utilizado en cada caso.

a) $8^{-9} = \frac{1}{8^9}$

b) $(5^{-8-(-2)})^{-2} = (5^{-6})^{-2} = 5^{12}$

c) $(2^3 \cdot 2^2)^{-4} = (2^5)^{-4} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

d) $\left(\frac{72}{15}\right)^3 = \left(\frac{24}{5}\right)^3$

e) $-\frac{2}{5}$

f) $24^{-42} = \frac{1}{24^{42}}$

006 Calcula.

a) $(x^5 y^{-2}) : (x^6 y^{-1})$

b) $(6x^4 y^2) : (3x^2 y^{-2})$

a) $x^{5-6} y^{-2-(-1)} = x^{-1} y^{-1} = \frac{1}{xy}$

b) $2x^{4-2} y^{2-(-2)} = 2x^2 y^4$

007 Simplifica y expresa el resultado como potencia.

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$

c) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27$

b) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

d) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-2} \cdot 25$

a) $5^{7-(-14)} \cdot 3^{3-(-3)} \cdot (2 \cdot 3)^{-4-(-2)} = 5^{21} \cdot 3^6 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2} = 5^{21} \cdot 3^4 \cdot 2^{-2} = \frac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $2 \cdot \frac{3}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{3^2}{2^{10}}$

c) $3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^5$

d) $\frac{1}{5^{-6}} \cdot 5^2 = 5^8$

008 Expresa en notación científica.

a) 9.340.000

g) 0,0089

b) 0,000125

h) 137

c) 789.200

i) 1 diezmilésima

d) 1 billón

j) 5 centésimas

e) Media decena

k) 9 milésimas

f) 4

l) 6 trillones

a) $9,34 \cdot 10^6$

g) $8,9 \cdot 10^{-3}$

b) $1,25 \cdot 10^{-4}$

h) $1,37 \cdot 10^2$

c) $7,892 \cdot 10^5$

i) $1 \cdot 10^{-4}$

d) $1 \cdot 10^6$

j) $5 \cdot 10^{-2}$

e) $5 \cdot 10^0$

k) $9 \cdot 10^{-3}$

f) 4

l) $6 \cdot 10^{18}$

009 Estos números no están correctamente escritos en notación científica. Corrégelos.

a) $0,7 \cdot 10^6$

b) $11,2 \cdot 10^{-3}$

a) $7 \cdot 10^5$

b) $1,12 \cdot 10^{-2}$

Potencias y radicales

010



Calcula.

a) $2,3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$

b) $(5 \cdot 10^{-2}) \cdot (3,1 \cdot 10^{-4})$

a) $2,8 \cdot 10^4 = 28.000$

b) $1,55 \cdot 10^{-5} = 0,0000155$

011

Realiza las siguientes operaciones, y expresa el resultado en notación científica.

a) $9,34 \cdot 10^4 + 7,6 \cdot 10^2$

e) $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (8 \cdot 10^{-5})$

b) $7,8 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-5}$

f) $(4 \cdot 10^{-6}) : (2 \cdot 10^{-8})$

c) $3 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^{-4}$

g) $(7 \cdot 10^4) : (1,4 \cdot 10^5)$

d) $(9 \cdot 10^4) \cdot (8,5 \cdot 10^2)$

h) $(4 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^3) : (8 \cdot 10^{-2})$

a) $9,416 \cdot 10^4$

e) $4,16 \cdot 10^{-8}$

b) $7,88 \cdot 10^{-3}$

f) $2 \cdot 10^2$

c) $6,997 \cdot 10^{-4}$

g) $5 \cdot 10^{-1}$

d) $7,65 \cdot 10^7$

h) $1 \cdot 10^{10}$

012

Un microorganismo mide 3,5 micras. Sabiendo que 1 micra es la millonésima parte de 1 metro, expresa, en metros y en notación científica, la longitud de 4 millones de microorganismos dispuestos en fila.

$$(4 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^{-6}) = 1,4 \cdot 10^1 = 14 \text{ metros}$$

013



Realiza, utilizando la calculadora y también sin ella, esta suma:

$9,23 \cdot 10^{99} + 1,78 \cdot 10^{99}$. ¿Qué diferencias observas entre las dos formas de realizar la suma?

En el caso de que la calculadora solo admita dos cifras en el exponente, no será capaz de hacerlo e indicará un error.

Si se realiza manualmente, el resultado es $1,101 \cdot 10^{100}$.

014

Transforma las potencias en raíces.

a) $16^3 = 4.096$

c) $(-2)^5 = -32$

b) $4^3 = 64$

d) $(-2)^8 = 256$

a) $16 = \sqrt[3]{4.096}$

c) $-2 = \sqrt[5]{-32}$

b) $4 = \sqrt[3]{64}$

d) $-2 = \sqrt[8]{256}$

015

Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt[4]{-100}$

d) $\sqrt[5]{243}$

a) 2 y -2

c) No existe

b) -2

d) 3

016  Halla, con la calculadora, el valor numérico de estas expresiones.

a) $1 + \sqrt{6}$ b) $\sqrt[5]{15} - 7$ c) $(-2) \cdot \sqrt[4]{-16}$

- a) $1 + 2,4494897 = 3,4494897$
 b) $1,7187719 - 7 = -5,2812281$
 c) No existe

017 Pon dos ejemplos de radicales cuyas raíces sean 3 y -3 . ¿Existe un radical con raíces 3 y -5 ?

Ejemplos: $\sqrt{9}$ y $\sqrt[4]{81}$

No es posible que un radical tenga como raíces 3 y -5 , ya que en el caso de tener dos raíces, estas deben ser opuestas.

018 Expresa las siguientes potencias como radicales y halla su valor numérico.

a) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{4}{7}}$ e) $4^{\frac{3}{4}}$
 b) $(-2)^{\frac{1}{3}}$ d) $(-7)^{\frac{1}{6}}$ f) $(-6)^{\frac{4}{5}}$

- a) $\sqrt{5^3} = 11,18033989$ d) $\sqrt[6]{-7}$ no existe.
 b) $\sqrt[3]{-2} = -1,2599210$ e) $\sqrt[4]{4^3} = 2,8284271$
 c) $\sqrt[7]{3^4} = 1,8734440$ f) $\sqrt[5]{(-6)^4} = 4,1929627$

019 Da dos radicales equivalentes a cada uno.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[5]{6^3}$ c) $\sqrt[7]{5^{10}}$
 a) $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{3^4}$ b) $\sqrt[10]{6^6}$ y $\sqrt[15]{6^9}$ c) $\sqrt[14]{5^{20}}$ y $\sqrt[21]{5^{30}}$

020 Razona si son equivalentes estos radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$ c) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$
 b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[4]{4}$ y $\sqrt{2}$
 a) $3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow$ Equivalentes c) $5^{\frac{10}{4}} \neq 5^{\frac{4}{2}} \rightarrow$ No equivalentes
 b) $2^{\frac{10}{5}} \neq 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ No equivalentes d) $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ Equivalentes

021 Expresa en forma de potencia.

a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ c) $\sqrt[3]{6xy}$ d) $4\sqrt[3]{x^2}$
 a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{-\frac{1}{3}}$ c) $(6xy)^{\frac{1}{3}}$ d) $4x^{\frac{2}{3}} = (8x)^{\frac{2}{3}}$

Potencias y radicales

022 Compara los siguientes radicales.

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \text{ y } \sqrt[5]{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} \\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}} \\ \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

023 Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[5]{5^{12}}$ b) $\sqrt[4]{3^{11}}$ c) $\sqrt[7]{a^{47}}$ d) $\sqrt[6]{b^{35}}$

a) $5^2 \sqrt[5]{5^2}$ c) $a^6 \sqrt[7]{a^5}$

b) $3^2 \sqrt[4]{3^3}$ d) $b^5 \sqrt[6]{b^5}$

024 Introduce factores dentro del radical.

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{6}$ c) $4\sqrt[4]{7}$ d) $2\sqrt[3]{5}$

a) $\sqrt{6^2 \cdot 2} = \sqrt{72}$

c) $\sqrt[4]{4^4 \cdot 7} = \sqrt[4]{1.792}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$

d) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[3]{160}$

025 Simplifica, si es posible.

a) $\sqrt[4]{7.776}$

b) $\sqrt[6]{1.024}$

a) $\sqrt[4]{6^5} = 6\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

026 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt[6]{3} + 3\sqrt[6]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{7} - \frac{5}{3}\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7}$

d) $\frac{\sqrt[5]{1.568}}{\sqrt[4]{36}}$

a) $\left(4 + 3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[6]{3} = \frac{13}{2}\sqrt[6]{3}$

b) $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3} + 1\right) \cdot \sqrt[4]{7} = \frac{5}{6}\sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{3^3 \cdot 4^4}$

d) $\frac{\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2}}{\sqrt[4]{3^2 \cdot 2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt{3 \cdot 2}} = 2 \cdot \sqrt[10]{\frac{7^4}{2^5 \cdot 3^5}}$

027 Calcula.

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{9}$ b) $(2\sqrt[4]{7})^5$ c) $\sqrt[5]{22} \cdot \sqrt[3]{11}$ d) $\sqrt[5]{3\sqrt[4]{4}}$

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{16}{15}} = \sqrt[15]{3^{16}}$

b) $2^5 \cdot \sqrt[4]{7^5} = 32 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{7} = 224\sqrt[4]{7}$

c) $(2 \cdot 11)^{\frac{1}{5}} \cdot 11^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 11)^{\frac{3}{15}} \cdot 11^{\frac{5}{15}} = \sqrt[15]{2^3 \cdot 11^8}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{4 \cdot 3^7}} = \sqrt[35]{4 \cdot 3^7} = \sqrt[35]{8.748}$

028 Haz esta operación.

$$2\sqrt[5]{9} - (7\sqrt[5]{3})^2 + \sqrt[5]{9}$$

$$2\sqrt[5]{9} - (7\sqrt[5]{3})^2 + \sqrt[5]{9} = 2 \cdot 3^{\frac{2}{5}} - 7 \cdot 3^{\frac{2}{5}} + 3^{\frac{2}{5}} = -4 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = -4\sqrt[5]{3^2} = -4\sqrt[5]{9}$$

029 Transforma estas fracciones en otras equivalentes sin radicales en el denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{2}{\sqrt[5]{2}}$ e) $\frac{4}{\sqrt[4]{64}}$ f) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[10]{3^5 \cdot 3^6}}{3} = \frac{3\sqrt[10]{3}}{3} = \sqrt[10]{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\frac{2\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4}} = \frac{2\sqrt[5]{2^4}}{2} = \sqrt[5]{2^4}$

e) $\frac{4}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

f) $\frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

030 Racionaliza.

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{7}{\sqrt[4]{6^3}}$

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3^5}} = \frac{3\sqrt[6]{3^5}}{3} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $\frac{7\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{6^3} \cdot \sqrt[4]{6}} = \frac{7\sqrt[4]{6}}{6}$

Potencias y radicales

031 Resuelve y racionaliza.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}}$

b) $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 2}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{25}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

032 Calcula el conjugado de estos números, y efectúa el producto de cada número por su conjugado.

a) $1 + \sqrt{5}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$

b) $\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{33} - \sqrt{11}$

a) Conjugado $\rightarrow 1 - \sqrt{5}$

$$(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5}) = 1 - 5 = -4$$

b) Conjugado $\rightarrow \sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{2}\right) = \frac{5}{6} - 2 = \frac{-7}{6}$$

c) Conjugado $\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\right) = \frac{2}{4} - 5 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

d) Conjugado $\rightarrow \sqrt{33} + \sqrt{11}$

$$(\sqrt{33} - \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{33} + \sqrt{11}) = 33 - 11 = 22$$

033 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{-3}{4 - \sqrt{3}}$

b) $\frac{-3}{4 + \sqrt{3}}$

a) $\frac{-3 \cdot (4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3}) \cdot (4 + \sqrt{3})} = \frac{-3 \cdot (4 + \sqrt{3})}{13}$

b) $\frac{-3 \cdot (4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3}) \cdot (4 - \sqrt{3})} = \frac{-3 \cdot (4 - \sqrt{3})}{13}$

034 Efectúa estas operaciones y racionaliza el resultado, si fuera preciso.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{13}{3\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{6}$

b) $\frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = -3 - 2\sqrt{2}$

035 Calcula el inverso de estos números.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{100}$

d) $100 + \sqrt{555}$

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{100}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$

d) $\frac{1}{100 + \sqrt{555}} = \frac{100 - \sqrt{555}}{(100 + \sqrt{555}) \cdot (100 - \sqrt{555})} = \frac{100 - \sqrt{555}}{9.445}$

ACTIVIDADES

036 Calcula las siguientes potencias.

a) 2^{-3}

c) 10^5

e) $(-3)^{-4}$

g) $(-12)^{-2}$

i) $(-1)^{-3}$

b) 7^{-4}

d) 8^{-2}

f) $(-2)^{-5}$

h) $(-6)^3$

a) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

g) $\frac{1}{(-12)^2} = \frac{1}{144}$

b) $\frac{1}{7^4} = \frac{1}{2.401}$

e) $\frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

h) $-6^3 = -216$

c) 100.000

f) $\frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{32}$

i) -1

037 Halla el inverso de estos números.

a) 3

b) $-\frac{1}{3}$

c) -3

d) 3^3

e) $\frac{1}{3}$

f) -3^{-3}

a) $\frac{1}{3}$

b) -3

c) $-\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e) 3

f) -3^3

Potencias y radicales

038 Expresa estas fracciones como potencias de números enteros, empleando exponentes negativos, si es preciso.

a) $\frac{12}{5}$

c) $\frac{-3}{4}$

e) $\frac{2}{-5}$

b) $\frac{11}{65}$

d) $-\frac{5}{9}$

f) $\frac{-33}{-55}$

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^{-1}$

c) $-3 \cdot 4^{-1}$

e) $-2 \cdot 5^{-1}$

b) $11 \cdot 13^{-1} \cdot 5^{-1}$

d) $-5 \cdot 3^{-2}$

f) $3 \cdot 5^{-1}$

039 Simplifica, expresando como única potencia.

a) $2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4}$

c) $(-4)^{-4} : (-4)^5 : (-4)^{-6}$

b) $(-3)^{-6} : (-3)^5 \cdot (-3)^{-7}$

d) $7^{-2} \cdot 7^{-3} : 7^{-5}$

a) $2^{-5+3-4} = 2^{-6}$

c) $(-4)^{-4-5-(-6)} = (-4)^{-3}$

b) $(-3)^{-6-5-7} = (-3)^{-18}$

d) $7^{-2-3-(-5)} = 7^0 = 1$

040 Opera y expresa el resultado en forma de una sola potencia.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{10}\right)^0$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^8$

d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-5} : \left(\frac{-1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^7$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^9$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-8}$

d) $\left(\frac{-1}{5}\right)^6$

041 Efectúa las operaciones.

a) $4^6 : 2^4$

e) $2^{-3} : (-2^{-3})$

b) $(-3)^4 \cdot (-3^4)$

f) $[(-5)^3]^2 \cdot 5^{-4}$

c) $(-2^6) : (-2^{-6})$

g) $[(2^4 \cdot 2^{-8})^{-1}]^{-4}$

d) $(-2^3)^4 \cdot (-2^4)^{-3}$

h) $-(-2^3) : (-2^4)$

a) $2^{12} : 2^4 = 2^8$

e) $2^{-3} : [(-1) \cdot 2^{-3}] = -1$

b) $(-3)^8$

f) $(-5)^6 \cdot 5^{-4} = 5^6 \cdot 5^{-4} = 5^2$

c) $-2^6 : (-2^{-6}) = 2^{6-(-6)} = 2^{12}$

g) $[(2^{-4})^{-1}]^{-4} = 2^{-16}$

d) $(-1)^4 \cdot 2^{12} \cdot (-1)^{-3} \cdot 2^{-12} = -1$

h) $-(-2^3) : [(-1) \cdot 2^4] = -2^{-1}$

042 HAZLO ASÍ**¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES CON POTENCIAS FACTORIZANDO LAS BASES?****Resuelve esta operación con potencias, simplificando todo lo que puedas.**

$$44^{-3} \cdot 22^5$$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en factores primos.

$$44 = 2^2 \cdot 11 \quad 22 = 2 \cdot 11$$

SEGUNDO. Se aplica esa descomposición a la operación.

$$44^{-3} \cdot 22^5 = (2^2 \cdot 11)^{-3} \cdot (2 \cdot 11)^5 = (2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^5 \cdot 11^5)$$

TERCERO. Se resuelve la operación.

$$(2^{-6} \cdot 11^{-3}) \cdot (2^5 \cdot 11^5) = 2^{-6+5} \cdot 11^{-3+5} = 2^{-1} \cdot 11^2 = \frac{121}{2}$$

043 Opera y simplifica el resultado.

a) $(30^{-5} : 10^{-5})^3$

c) $(9^0 : 9^{-3})^2$

e) $(12^3 : 2^3)^{-4}$

b) $(6^{-2} \cdot 3^{-2})^{-1}$

d) $(10^{-10} \cdot 10^{-6})^{-2}$

f) $(20^{-5} : 10^{-5})^{-3}$

a) $(3^{-5})^3 = 3^{-15}$

d) $(10^{-16})^{-2} = 10^{32}$

b) $(2^{-2})^{-1} = 2^2$

e) $(3^3 \cdot 2^6 : 2^3)^{-4} = (3^3 \cdot 2^3)^{-4} = 6^{-12}$

c) $(9^3)^2 = 9^6$

f) $(2^{-5})^{-3} = 2^{15}$

044 Calcula y simplifica el resultado.

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-4}{8}\right)^3$

c) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{-3}$

d) $\left(\frac{-7}{2}\right)^3 : \left(\frac{5}{-2}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 : \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = [(-2)^2 \cdot 5^{-2}] : [(-2)^{-3}] = (-2)^5 \cdot 5^{-2}$

b) $(3^{-8} \cdot 2^8) \cdot (2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3) = 2^8 \cdot 3^{-11} \cdot 5^3$

c) $[(-3)^3 : 2^3] \cdot (5^{-2} : 2^{-4}) = (-3)^3 \cdot 2^1 \cdot 5^{-2}$

d) $[(-7)^3 : 2^3] : [5^{-2} : (-2)^{-2}] = (-7)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 5^2$

045 Efectúa y simplifica.

a) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{125}{32}\right)^3 : \left(\frac{10}{8}\right)^4$

b) $\left(\frac{64}{27}\right)^{-3} : \left(\frac{9}{16}\right)^2 : \left(\frac{6}{18}\right)^{-2}$

a) $\left(\frac{2^4}{5^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5^3}{2^6}\right)^3 : \left(\frac{5}{2^2}\right)^4 = \frac{5^9}{2^{18}}$

b) $\left(\frac{2^6}{3^3}\right)^{-3} : \left(\frac{3^2}{2^4}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2^{-12} \cdot 3^3$

Potencias y radicales

046 Simplifica.

a) $\frac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^2 \cdot 4^4}$

b) $\frac{3^{-4} \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{8^2 \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-3}}$

a) $3^{6-6} \cdot 2^{8-8} \cdot 5^{3-4} = 5^{-1}$

b) $3^{-4+5-2} \cdot 2^{4-6+3} = 3^{-1} \cdot 2^1$

c) $-5^{3-10} \cdot 2^{12-7} \cdot 3^{-4-(-4)} = -5^{-7} \cdot 2^5$

d) $\frac{2^{-5} \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4}}{2^{-15} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-8}} = 2^7 \cdot 3^3$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-8)^4 \cdot 9^{-2}}{(-3)^{-4} \cdot 2^7 \cdot 25^5}$

d) $\frac{32^{-1} \cdot 36^{-2} \cdot 18^{-2}}{8^{-5} \cdot 6^{-3} \cdot 9^4}$

047 Realiza estas operaciones con potencias, efectuando primero las operaciones dentro del corchete. Comprueba que si lo haces al revés, el resultado no varía.

a) $[2^4 \cdot (-5)]^{-2}$

b) $[(-3) \cdot 8]^{-3}$

c) $[4 : (-2)^3]^{-4}$

d) $[(-10)^2 : (-5)]^{-5}$

e) $[10^3 : (-2)]^{-3}$

f) $[9^2 : (-3)^5]^{-1}$

g) $[25^{-1} \cdot 10^3]^{-2}$

h) $[36^{-2} \cdot 2^5]^{-4}$

a) $[-80]^{-2} = \frac{1}{80^2}$

b) $[-24]^{-3} = -\frac{1}{24^3}$

c) $[-2^{-1}]^{-4} = 2^4$

d) $[-20]^{-5} = -\frac{1}{20^5}$

e) $[-500]^{-3} = -\frac{1}{500^3}$

f) $[-3^{-1}]^{-1} = -3$

g) $[40]^{-2} = \frac{1}{40^2}$

h) $[9^{-2} \cdot 2]^{-4} = \frac{9^8}{2^4}$

048 Opera y expresa el resultado en forma de potencia de exponente entero.

a) $\left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^6 \right]^{-1}$

b) $\left[\left(\frac{-1}{4} \right)^{-4} : 4^3 : \left(\frac{1}{4} \right)^{-5} \right]^{-2}$

c) $\left[2^{-2} : \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^7$

a) $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{4+3+6} \right]^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{13}$

b) $[4^{4-3-5}]^{-2} = (4^{-4})^{-2} = 4^8$

c) $[2^{-2-(-2)}]^7 = 2^0 = 1$

d) $\left[\left(\frac{5}{6} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^5 \right]^3$

e) $\left[\left(\frac{25}{2} \right)^{-2} : \left(\frac{25}{2} \right)^{-6} \cdot \left(\frac{2}{25} \right)^8 \right]^2$

f) $\left[9^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 : 2 \right]^{-2}$

d) $\left[\left(\frac{5}{6} \right)^{-1-3-5} \right]^3 = \left(\frac{6}{5} \right)^{27}$

e) $\left[\left(\frac{25}{2} \right)^{-2-(-6)-8} \right]^2 = \left(\frac{2}{25} \right)^8$

f) $[3^{4-2} \cdot 2^{-1}]^{-2} = \frac{2^2}{3^4} = \left(\frac{2}{9} \right)^2$

049 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EFECTÚAN OPERACIONES COMBINADAS CON POTENCIAS?

Efectúa esta operación.

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2}$$

PRIMERO. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{17}{8} - 2\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$$

SEGUNDO. Se calculan las potencias.

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)^1 - 8^2 = \frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64$$

TERCERO. Se efectúan las operaciones, respetando la jerarquía.

$$\frac{16}{49} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) - 64 = \frac{-80}{147} - 64 = \frac{9.488}{147}$$

050 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^{-1} + 2 : \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{10}\right)^{-1} : \left(1 - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{14}{15}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)^{-1} + 2 : \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} &= \left(-\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 7}\right) + \left(\frac{2 \cdot 7^2}{3^2}\right) = \\ &= -\frac{3^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 7^3} + \frac{2 \cdot 7^2}{3^2} = \frac{-3^4 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7^5}{2 \cdot 7^3 \cdot 3^2} = \frac{31.589}{6.174} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\text{c) } \left(-\frac{1}{10}\right)^{-1} : \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2^2}{3^2}\right) = -\frac{50}{3} - \frac{4}{9} = \frac{-154}{9}$$

Potencias y radicales

051 Indica qué igualdades son verdaderas, y escribe el resultado correcto en las falsas.

a) $\frac{a^3 \cdot b^{-4} \cdot c^4}{a^{-3} \cdot b^4 \cdot c^{-4}} = 1$

c) $\frac{3^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-2}}{3^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 5^{-3}} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = 1$

d) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$

a) Falsa $\rightarrow a^6 \cdot b^{-8} \cdot c^8 \neq 1$

b) Falsa $\rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = -3^{2-3+5} = -3^4 \neq 1$

c) Falsa $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 5 \neq \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5}$

d) Verdadera $\rightarrow \left(\frac{-2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

052 Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su orden de magnitud.

a) 15.000.000.000

e) 4.598.000.000

b) 0,00000051

f) 0,0967254

c) 31.940.000

g) 329.000.000

d) 0,0000000009

h) 111.000

a) $1,5 \cdot 10^{10} \rightarrow$ Orden de magnitud: 10

b) $5,1 \cdot 10^{-7} \rightarrow$ Orden de magnitud: -7

c) $3,194 \cdot 10^7 \rightarrow$ Orden de magnitud: 7

d) $9 \cdot 10^{-10} \rightarrow$ Orden de magnitud: -10

e) $4,598 \cdot 10^9 \rightarrow$ Orden de magnitud: 9

f) $9,67254 \cdot 10^{-2} \rightarrow$ Orden de magnitud: -2

g) $3,29 \cdot 10^8 \rightarrow$ Orden de magnitud: 8

h) $1,11 \cdot 10^5 \rightarrow$ Orden de magnitud: 5

053 Desarrolla estos números escritos en notación científica.

a) $4,8 \cdot 10^8$

e) $6,23 \cdot 10^{-18}$

b) $8,32 \cdot 10^{-11}$

f) $3,5 \cdot 10^{-12}$

c) $5,659 \cdot 10^{-6}$

g) $2,478 \cdot 10^{15}$

d) $7,925 \cdot 10^9$

h) $1,9385 \cdot 10^{-7}$

a) 480.000.000

e) 0,000000000000000000623

b) 0,0000000000832

f) 0,0000000000035

c) 0,000005659

g) 2.478.000.000.000.000

d) 7.925.000.000

h) 0,00000019385

054 Indica cuáles de los siguientes números están escritos en notación científica.

- a) $54 \cdot 10^{12}$ e) $7,2 \cdot 10^{-2}$
 b) $0,75 \cdot 10^{-11}$ f) $0,5 \cdot 10^{14}$
 c) 243.000.000 g) $0,01 \cdot 10^{-30}$
 d) 0,00001 h) $18,32 \cdot 10^4$

Solo está escrito en notación científica el número del apartado e) $7,2 \cdot 10^{-2}$.

055 Efectúa las operaciones.

- a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
 b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
 c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
 d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
 e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$
- a) $3,89 \cdot 10^4$ d) $2,303975 \cdot 10^2$
 b) $1,0335 \cdot 10^4$ e) $5,93830346 \cdot 10^4$
 c) $3,620000585 \cdot 10^4$

056 Calcula.

- a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
 b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
 c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
 d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
 e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$
- a) $5,78 \cdot 10^4$ d) $4,65261 \cdot 10^6$
 b) $8,055 \cdot 10^3$ e) $4,9977 \cdot 10^2$
 c) $7,887 \cdot 10^{-4}$

057 Haz las operaciones.

- a) $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$ c) $8,3 \cdot 10^6 : 5,37 \cdot 10^2$
 b) $8,91 \cdot 10^{-5} \cdot 5,7 \cdot 10^{14}$ d) $9,5 \cdot 10^{-6} : 3,2 \cdot 10^3$
- a) $3,8325 \cdot 10^2$ c) $1,5456 \cdot 10^4$
 b) $5,0787 \cdot 10^{10}$ d) $2,9688 \cdot 10^{-9}$

058 Simplifica.

- a) $\frac{6,147 \cdot 10^{-2} \cdot 4,6 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^8 \cdot 6,57 \cdot 10^{-5}}$ b) $\frac{3,92 \cdot 10^4 \cdot 5,86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9,2 \cdot 10^{13}}$
- a) $5,448 \cdot 10^{-3}$
 b) $5,567 \cdot 10^{-8}$

Potencias y radicales

059 Calcula, si es posible, el valor numérico de los siguientes radicales.

- | | | |
|--------------------|-------------------------|----------------------|
| a) $\sqrt[4]{81}$ | d) $\sqrt[5]{-100.000}$ | g) $\sqrt[4]{625}$ |
| b) $\sqrt[5]{32}$ | e) $\sqrt[4]{-256}$ | h) $\sqrt[4]{1.296}$ |
| c) $\sqrt[3]{-27}$ | f) $\sqrt[3]{-216}$ | i) $\sqrt[7]{-128}$ |
| a) ± 3 | d) -10 | g) ± 5 |
| b) 2 | e) No es posible | h) ± 6 |
| c) -3 | f) -6 | i) -2 |

060 Indica en estos radicales cuáles son el índice y el radicando. Después, exprésalos como potencia de exponente fraccionario.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\sqrt[6]{3}$ | c) $\sqrt[9]{5}$ | e) $\sqrt{33}$ |
| b) $\sqrt[7]{-3}$ | d) $\sqrt[5]{-2}$ | f) $\sqrt[4]{25}$ |

- a) Índice: 6, radicando: 3 $\rightarrow 3^{\frac{1}{6}}$
 b) Índice: 7, radicando: $-3 \rightarrow (-3)^{\frac{1}{7}}$
 c) Índice: 9, radicando: 5 $\rightarrow 5^{\frac{1}{9}}$
 d) Índice: 5, radicando: $-2 \rightarrow (-2)^{\frac{1}{5}}$
 e) Índice: 2, radicando: 33 $\rightarrow 33^{\frac{1}{2}}$
 f) Índice: 4, radicando: 25 $\rightarrow 25^{\frac{1}{4}}$

061 Transforma los radicales en potencias y las potencias en radicales.

- | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $3^{\frac{1}{4}}$ | d) $7^{\frac{3}{5}}$ | g) $\sqrt[3]{2^5}$ |
| b) $5^{\frac{2}{3}}$ | e) $10^{\frac{2}{7}}$ | h) $\sqrt[5]{3^2}$ |
| c) $2^{\frac{1}{6}}$ | f) $\sqrt[4]{5^7}$ | i) $\sqrt[6]{7^5}$ |
| a) $\sqrt[4]{3}$ | d) $\sqrt[5]{7^3}$ | g) $2^{\frac{5}{3}}$ |
| b) $\sqrt[3]{5^2}$ | e) $\sqrt[7]{10^2}$ | h) $3^{\frac{2}{5}}$ |
| c) $\sqrt[6]{2}$ | f) $5^{\frac{7}{4}}$ | i) $7^{\frac{5}{6}}$ |

062 De estos radicales, ¿cuáles son equivalentes?

$$\sqrt[4]{2^3}, \sqrt[5]{3^2}, \sqrt[3]{7^2}, \sqrt[8]{2^6}, \sqrt[12]{7^4}, \sqrt[10]{3^4}, \sqrt[12]{2^9}, \sqrt[20]{2^{15}} \text{ y } \sqrt[10]{3^2}$$

Son equivalentes:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[20]{2^{15}}$$

$$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[10]{3^4}$$

063 Extrae factores de los siguientes radicales.

- a) $\sqrt[3]{2^3 a^5}$ d) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}}$
 b) $\sqrt[3]{a^3 b^5 c^6}$ e) $\sqrt{2^6 a^4 b^8}$
 c) $\sqrt[4]{2^4 a^7}$ f) $\sqrt{2^2 a^2 b^4}$
- a) $2a\sqrt[3]{a^2}$ d) $ab^2\sqrt[5]{a}$
 b) $abc^2\sqrt[3]{b^2}$ e) $2^3 a^2 b^4$
 c) $2a\sqrt[4]{a^3}$ f) $2ab^2$

064 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXTRAEN FACTORES DE UN RADICAL DESCOMPONIENDO EL RADICANDO EN FACTORES PRIMOS?

Simplifica el radical $\sqrt[3]{10.800}$.

PRIMERO. Se factoriza el radicando.

$$10.800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

SEGUNDO. Se expresa el radical como potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[3]{10.800} = (2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

TERCERO. Si alguna de las fracciones de los exponentes es impropia, se pone como la suma de un número entero y una fracción.

$$2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3^1 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$$

CUARTO. Se expresa como producto de potencias y se vuelve a transformar en radical.

$$\begin{aligned} 2^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} &= 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{5^2} = \\ &= 6 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5^2} = 6\sqrt[3]{50} \end{aligned}$$

065 Extrae factores de las raíces.

- a) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{98}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$
 b) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt{12}$ h) $\sqrt[3]{40}$
 c) $\sqrt{50}$ f) $\sqrt{75}$ i) $\sqrt[3]{320}$
- a) $2\sqrt{2}$ d) $7\sqrt{2}$ g) 10
 b) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$ h) $2\sqrt[3]{5}$
 c) $5\sqrt{2}$ f) $5\sqrt{3}$ i) $4\sqrt[3]{5}$

Potencias y radicales

066 Simplifica estos radicales.

- | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| a) $\sqrt[3]{16}$ | d) $\sqrt{27}$ | g) $\sqrt[6]{27}$ |
| b) $\sqrt[3]{54}$ | e) $\sqrt[5]{128}$ | h) $\sqrt[8]{625}$ |
| c) $\sqrt[4]{128}$ | f) $\sqrt[3]{32}$ | i) $\sqrt[12]{4}$ |
| a) $2\sqrt[3]{2}$ | d) $3\sqrt{3}$ | g) $\sqrt{3}$ |
| b) $3\sqrt[3]{2}$ | e) $2\sqrt[5]{2}$ | h) $\sqrt{5}$ |
| c) $2\sqrt[4]{2^2}$ | f) $2\sqrt[3]{2^2}$ | i) $\sqrt[6]{2}$ |

067 Introduce factores en el radical.

- | | | |
|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $2\sqrt[3]{5}$ | d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ | g) $2\sqrt[3]{7}$ |
| b) $4\sqrt[4]{20}$ | e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ | h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ |
| c) $3\sqrt[5]{15}$ | f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ | i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ |
| a) $\sqrt[3]{40}$ | d) $\sqrt{\frac{18}{25}}$ | g) $\sqrt[3]{56}$ |
| b) $\sqrt[4]{1.280}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$ | h) $\sqrt[3]{5^2}$ |
| c) $\sqrt[5]{3.645}$ | f) $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$ | i) $\sqrt[3]{\frac{18}{125}}$ |

068 Introduce factores en el radical, si es posible.

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $a\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ | c) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ | e) $\frac{4ab}{c}\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ |
| b) $5 + \sqrt{2}$ | d) $-a^2\sqrt[3]{a}$ | f) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ |
| a) $\sqrt{\frac{4a^2-a}{2}}$ | c) $\sqrt{\frac{3}{2a}}$ | e) $\sqrt[4]{\frac{32a^3b^5}{c^2}}$ |
| b) No es posible | d) $-\sqrt[3]{a^7}$ | f) $-\sqrt[3]{8a^4b^7}$ |

069 Efectúa las siguientes operaciones.

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------|-----------------|
| a) $-4\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$ | c) $3\sqrt{5} - \sqrt{20}$ | | |
| b) $17\sqrt{2} - 9\sqrt{8}$ | d) $4\sqrt{2} + 3\sqrt{18}$ | | |
| a) $\sqrt{5}$ | b) $-\sqrt{2}$ | c) $\sqrt{5}$ | d) $13\sqrt{2}$ |

070 Realiza estas operaciones.

a) $5\sqrt{12} + 7\sqrt{27} - \sqrt{243} - \frac{1}{2}\sqrt{75}$

b) $4\sqrt{8} - 7\sqrt{50} + \frac{8}{3}\sqrt{18} + 4\sqrt{98}$

c) $12\sqrt[3]{16} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{128} + 7\sqrt[3]{54}$

a) $10\sqrt{3} + 21\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{39}{2}\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{2} - 35\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 28\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

c) $24\sqrt[3]{2} - \frac{14}{5}\sqrt[3]{2} + 21\sqrt[3]{2} = \frac{211}{5}\sqrt[3]{2}$

071 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[3]{3} : \sqrt{3}$

g) $\sqrt[6]{5} : \sqrt{5}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$

d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{5}$

f) $\sqrt[5]{4} : \sqrt[4]{7}$

h) $\sqrt[4]{2} : \sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{6}$

c) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3}$

e) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$

g) $\sqrt[6]{\frac{1}{5^2}}$

b) $2\sqrt{6}$

d) $\sqrt[4]{75}$

f) $\sqrt[20]{\frac{2^8}{7^5}}$

h) $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

072 Calcula.

a) $2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$

d) $(5\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \cdot (-7)$

b) $3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{7})$

e) $(-3\sqrt{5} - 9\sqrt{7}) \cdot 4$

c) $-5 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

f) $(8\sqrt{5} - 7\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3}$

a) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

d) $-35\sqrt{3} + 56\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

e) $-12\sqrt{5} - 36\sqrt{7}$

c) $-5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

f) $16\sqrt{15} - 14\sqrt{6}$

073 Opera y simplifica.

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

c) $(6\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (6\sqrt{7} - \sqrt{5})$

b) $(5\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{2} + 3)$

d) $(2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{10})$

a) $3 - 2 = 1$

c) $36 \cdot 7 - 5 = 247$

b) $50 - 9 = 41$

d) $4 \cdot 5 - 10 = 10$

Potencias y radicales

074 Calcula y simplifica.



a) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})^2$

b) $(3\sqrt{2} + 1)^2 - (3\sqrt{2} - 1)^2$

c) $(4\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - (4\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$

a) $(4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}) + (4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}) = 146$

b) $(9 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}) - (9 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$

c) $(16 \cdot 6 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}) - (16 \cdot 6 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{6 \cdot 2}) = -32\sqrt{3}$

075 Haz las operaciones y simplifica.



a) $(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3)$

b) $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}) \cdot (5 - 2\sqrt{2})$

c) $(7\sqrt{5} + 4) \cdot (5\sqrt{5} - 3\sqrt{6})$

d) $(7\sqrt{2} - 3) \cdot (5\sqrt{3} + 2)$

a) $3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5 = 39 - 29\sqrt{2}$

b) $2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$
 $= 10\sqrt{7} - 4\sqrt{14} + 15\sqrt{2} - 12$

c) $7 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} =$
 $= 175 - 21\sqrt{30} + 20\sqrt{5} - 12\sqrt{6}$

d) $7 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 2 =$
 $= 35\sqrt{6} + 14\sqrt{2} - 15\sqrt{3} - 6$

076 Calcula.



a) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b} \cdot \sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4} : \sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{4}{6}} = a^{\frac{37}{12}} = \sqrt[12]{a^{37}}$

b) $\sqrt[6]{3^2 a^4 b^2} \cdot \sqrt[6]{2^3 a^3 b^9} = \sqrt[6]{72 a^7 b^{11}} = ab \sqrt[6]{72 ab^5}$

c) $\sqrt[15]{2^3 a^9 b^{12}} : \sqrt[15]{2^{10} a^{-5} b^{10}} = \sqrt[15]{2^{-7} a^4 b^2}$

d) $\sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[6]{a^3 b} = \sqrt[6]{a^4 b^2} = \sqrt[3]{a^2 b}$

077 Efectúa y simplifica.

a) $(5\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

b) $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$

c) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) + (2 - 4\sqrt{5}) \cdot (2 + 4\sqrt{5})$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5} + 4\sqrt{7})$

a) $(10 + \sqrt{6}) \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 30\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{18} =$
 $= 27\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

b) $(4 + 4\sqrt{3} + 3) - (4 - 3) = 4\sqrt{3} - 6$

c) $(9 - 5) + (4 - 80) = -72$

d) $3 - 5 + 16 \cdot 7 - \sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{3}\sqrt{5} + 4\sqrt{21} - 4\sqrt{21} - 4\sqrt{35} - 4\sqrt{35} =$
 $= 110 - 8\sqrt{35}$

078 Efectúa y expresa el resultado como potencia.

a) $(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})^6$

c) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt[3]{8^5\sqrt{81}}$

a) $(\sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^3})^6 = 5^5$

b) $\sqrt[10]{3^2} \cdot \sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{7}{10}}$

c) $\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[24]{2^{8+3}} = 2^{\frac{11}{24}}$

d) $2^{\frac{15}{3}} \sqrt[3]{3^4} = 2 \cdot 3^{\frac{4}{3}}$

079 Escribe los siguientes radicales como potencias de exponente fraccionario.



a) $a^{\frac{3}{4}}$

d) $a^{-\frac{1}{3}}$

g) $a^{-\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a^4\sqrt{a^3}} = \sqrt[12]{a^7} = a^{\frac{7}{12}}$

e) $a^{-\frac{1}{2}}$

h) $a^{\frac{5}{4}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{a^2}{a}} = a^{\frac{1}{4}}$

f) $a^{\frac{3}{2}}$

i) $a^{\frac{3}{4}}$

Potencias y radicales

080 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\sqrt[10]{3^2 \cdot 5} = \sqrt[10]{45}$

c) $\sqrt{\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}}} = \sqrt[12]{2}$

e) $\sqrt[12]{2}$

b) $\sqrt[8]{3}$

d) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

f) $\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$

081 Razona si son verdaderas o falsas estas igualdades.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$

e) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$

f) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

g) $\sqrt[4]{a^8 b^2} = a\sqrt{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$

h) $a\sqrt{b + c} = \sqrt{ab + ac}$

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \neq \sqrt[n \cdot m]{ab} \rightarrow$ Falsa

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \neq \sqrt[n+m]{ab} \rightarrow$ Falsa

c) Falsa, excepto cuando $n = 1$. Y se comprueba probando con cualquier valor de a , b y n .

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m} \neq \sqrt[n]{a^m b^m} \rightarrow$ Falsa, excepto si $n = m$.

e) Falsa, ya que si elevamos al cuadrado los términos:

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 \neq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

f) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{ab} \rightarrow$ Verdadera

g) $\sqrt[4]{a^8 b^2} = \sqrt{a^4 b} = a^2\sqrt{b} \neq a\sqrt{b} \rightarrow$ Falsa

h) $a\sqrt{b + c} = \sqrt{a^2 b + a^2 c} \neq \sqrt{ab + ac} \rightarrow$ Falsa, excepto para $a = 1$.

082 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{-5}{2\sqrt{5}}$

c) $\frac{4}{\sqrt[5]{3^2}}$

d) $\frac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$

a) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{4\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{4\sqrt[5]{3^3}}{3}$

b) $\frac{-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{7^3}} = \frac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

083 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{7 + \sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

b) $\frac{5\sqrt{3} - 4}{\sqrt[3]{3^2}}$

d) $\frac{6\sqrt{6} - 6}{\sqrt{6}}$

a) $\frac{(1 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$

b) $\frac{(5\sqrt{3} - 4) \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[6]{3^5} - 4\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\frac{(7 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}} = \frac{7\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{5^2 \cdot 3^3}}{3}$

d) $\frac{(6\sqrt{6} - 6) \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{36 - 6\sqrt{6}}{6} = 6 - \sqrt{6}$

084 Racionaliza los denominadores y simplifica.

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

d) $\frac{7}{\sqrt{11} - 3}$

b) $\frac{-5}{\sqrt{3} - 2}$

e) $\frac{-5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

c) $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{8}{5(\sqrt{10} - \sqrt{6})}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{-5 \cdot (\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2) \cdot (\sqrt{3} + 2)} = \frac{-5\sqrt{3} - 10}{-1} = 5\sqrt{3} + 10$

c) $\frac{4\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{24 + 4\sqrt{10}}{13}$

d) $\frac{7 \cdot (\sqrt{11} + 3)}{(\sqrt{11} - 3) \cdot (\sqrt{11} + 3)} = \frac{7\sqrt{11} + 21}{2}$

e) $\frac{-5 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{7})}{(\sqrt{6} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{7})} = \frac{-5\sqrt{6} + 5\sqrt{7}}{-1} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{7}$

f) $\frac{8 \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{6})}{5 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{6})} = \frac{8\sqrt{10} + 8\sqrt{6}}{20} = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}}{5}$

Potencias y radicales

085 Racionaliza.

a) $\frac{1}{\sqrt{3+6}}$

b) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{5\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

d) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{2 + 3\sqrt{3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{(4\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{12 + \sqrt{21}}{6}$

c) $\frac{(5\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3} - 2}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 1}{3}$

d) $\frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \cdot (2 - 3\sqrt{3})}{(2 + 3\sqrt{3}) \cdot (2 - 3\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{6} - 27\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{6}}{-23} =$
 $= \frac{-23\sqrt{2}}{-23} = \sqrt{2}$

086 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE FRACCIONES CON DENOMINADORES EN FORMA DE RADICAL?

Resuelve: $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

PRIMERO. Se racionalizan las fracciones.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

SEGUNDO. Se resuelve la operación.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{30} - 3\sqrt{3}}{3}$$

087 Racionaliza y opera.

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{b) } \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{c) } \frac{9}{\sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{8}} \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{12}}$$

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{b) } \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \frac{9\sqrt{7}}{7} - \frac{6\sqrt{8}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{7} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{7} - 21\sqrt{2}}{14}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{10} + 10\sqrt{3}}{30}$$

088 Racionaliza y efectúa las operaciones.

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad \text{b) } \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{6}} + \frac{9}{5 - \sqrt{3}}$$

$$\text{a) } \frac{3 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} - \frac{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{3 - 2} - \frac{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3 - 2} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = \sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \frac{5\sqrt{5} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})}{(\sqrt{8} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{6})} + \frac{9 \cdot (5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3}) \cdot (5 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{10\sqrt{10} + 5\sqrt{30}}{2} + \frac{45 + 9\sqrt{3}}{22} = \frac{110\sqrt{10} + 55\sqrt{30} + 45 + 9\sqrt{3}}{22}$$

089 Racionaliza y opera.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{32}}{5} - \frac{3\sqrt{50}}{2} + \frac{5}{\sqrt{18}} \quad \text{c) } \frac{-\sqrt{27} + \sqrt{48} + 5\sqrt{75}}{2\sqrt{75} - \sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \frac{3\sqrt{8} + \sqrt{18} - 2\sqrt{72}}{4\sqrt{8} + \sqrt{2}}$$

$$\text{a) } \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{24\sqrt{2} - 225\sqrt{2} + 25\sqrt{2}}{30} = \frac{-38\sqrt{2}}{15}$$

$$\text{b) } \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{8\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{c) } \frac{-3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 25\sqrt{3}}{10\sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{26}{9}$$

Potencias y radicales

090 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RACIONALIZAN FRACCIONES CON DENOMINADORES DEL TIPO $\sqrt[n]{a(b + \sqrt{c})}$?

Racionaliza: $\frac{2}{\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})}}$

PRIMERO. Se multiplica por $\sqrt[n]{a^{n-1}}$.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2(2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2 - \sqrt{3}}$$

SEGUNDO. Se multiplica por el conjugado del denominador resultante.

$$\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})}{2^2 - 3} = \sqrt[3]{2^2} \cdot (2 + \sqrt{3})$$

091 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{4}{\sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}$ b) $\frac{4}{\sqrt[4]{5} \cdot (3 + \sqrt{3})}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} &= \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{4 \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt[6]{3^4} \cdot 2^3 - 4\sqrt[6]{3^7}}{-3} = \\ &= \frac{-4\sqrt[6]{3^4} \cdot 2^3 + 12\sqrt[6]{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3} \cdot (3 + \sqrt{3})} &= \frac{4\sqrt[4]{5^3}}{5 \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt[4]{5^3} \cdot (3 - \sqrt{3})}{5 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{12\sqrt[4]{5^3} - 4\sqrt[4]{5^3} \cdot 3^2}{30} = \frac{6\sqrt[4]{5^3} - 2\sqrt[4]{5^3} \cdot 3^2}{15} \end{aligned}$$

092 Escribe en notación científica.

- a) Distancia Tierra-Luna: 384.000 km.
- b) Distancia Tierra-Neptuno: 4.308.000.000 km.
- c) Diámetro de un electrón: 0,0000000003 m.
- d) Superficie de la Tierra: 150.000.000 km².
- e) Longitud de un virus (gripe): 0,0000000022 m.
- f) Radio del protón: 0,0000000005 m.
- g) Peso de un estafilococo: 0,0000001 g.
- h) Un año luz: 9.460.000.000.000 km.
- i) Distancia del universo observable:
25.000 millones de años luz.



- a) $3,84 \cdot 10^5$ km d) $1,5 \cdot 10^8$ km² g) $1 \cdot 10^{-7}$ g
 b) $4,308 \cdot 10^9$ km e) $2,2 \cdot 10^{-9}$ m h) $9,4 \cdot 10^{12}$ km
 c) $3 \cdot 10^{-10}$ m f) $5 \cdot 10^{-11}$ m i) $2,5 \cdot 10^{10}$ años luz

093 Las unidades de medida con las que medimos la cantidad de información son:

Byte = 2^3 bits

Kilobyte = 2^{10} bytes

Megabyte = 2^{10} Kilobytes

Gigabyte = 2^{10} Megabytes



Expresa, en forma de potencia y en notación científica, estas cantidades de información en bits y bytes.

- a) Un disco duro de 120 Gb. c) Un disquete de 1,44 Mb.
 b) Una tarjeta de memoria de 512 Mb. d) Un CD-Rom de 650 Mb.

- a) $120 \text{ Gb} = 120 \cdot 2^{30} \text{ bytes} = 1,2884901888 \cdot 10^{10} \text{ bytes} = 1,03079215104 \cdot 10^{11} \text{ bits}$
 b) $512 \text{ Mb} = 512 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 5,36870912 \cdot 10^8 \text{ bytes} = 4,294967296 \cdot 10^9 \text{ bits}$
 c) $1,44 \text{ Mb} = 1,44 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 1,509949 \cdot 10^6 \text{ bytes} = 1,2079595 \cdot 10^7 \text{ bits}$
 d) $650 \text{ Mb} = 650 \cdot 2^{20} \text{ bytes} = 6,815744 \text{ bytes} \cdot 10^8 = 5,4525952 \cdot 10^9 \text{ bits}$

094 La masa de Plutón es $6,6 \cdot 10^{-9}$ veces la masa del Sol, y esta, a su vez, es $3,3 \cdot 10^6$ veces la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, halla la masa de Plutón y del Sol.

$$\text{Masa del Sol: } 6 \cdot 10^{24} \cdot 3,3 \cdot 10^6 = 1,98 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

$$\text{Masa de Plutón: } 1,98 \cdot 10^{31} \cdot 6,6 \cdot 10^{-9} = 1,3068 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

095 Se ha observado que la población de ciertas bacterias se duplica cada hora.

Si el número inicial es de $8 \cdot 10^{12}$ bacterias:

- a) ¿Cuántas bacterias habrá a las 3 horas?
 b) ¿Y a las 6 horas?
 c) ¿Cuántas horas tendrán que pasar para que sean $1,024 \cdot 10^{15}$ bacterias?

- a) $8 \cdot 10^{12} \cdot 2^3 = 6,4 \cdot 10^{13}$ bacterias
 b) $8 \cdot 10^{12} \cdot 2^6 = 5,12 \cdot 10^{14}$ bacterias
 c) $1,024 \cdot 10^{15} : 8 \cdot 10^{12} = 128$,
 por lo que $2^n = 128 \rightarrow n = 7$.
 Tendrán que pasar 7 horas.



Potencias y radicales

- 096** ●● ¿Cuánto mide la arista de un cubo cuyo volumen es 6 m^3 ? Expresa el resultado en forma de radicales.

$$\text{Arista}^3 = 6 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{6} \text{ m}$$

- 097** ●● ¿Cuánto mide el área de la cara de un cubo cuyo volumen es 9 cm^3 ? Expresa el resultado como radical y como potencia.

$$\text{Arista}^3 = 9 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{9} \text{ m}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81} \text{ m}^2 = 3^{\frac{4}{3}} \text{ m}^2$$

- 098** ●● Si el volumen de un cubo es 20 cm^3 , halla el valor de la suma de sus aristas.

$$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

$$\text{Suma de aristas} = 12 \cdot \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

- 099** ●● Con los datos de la actividad anterior, calcula la superficie lateral del cubo.

$$\text{Arista}^3 = 20 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{20} \text{ cm}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{20^2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{20^2} = 12\sqrt[3]{50} \text{ cm}^2$$

- 100** ●●● Generaliza los resultados de las actividades anteriores, dando el valor de la arista y la superficie lateral de un cubo en función de su volumen.

$$\text{Arista}^3 = \text{Volumen} \rightarrow \text{Arista} = \sqrt[3]{\text{Volumen}}$$

$$\text{Área de la cara} = \sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$$

$$\text{Área lateral} = 6\sqrt[3]{\text{Volumen}^2}$$

- 101** ●●● Expresa en notación científica.

a) 2^{-30} b) 5^{-10} c) 3^{-20} d) 7^{-15}

a) $2^{-30} = 0,000000000931322574615478515625 = 9,31322574615478515625 \cdot 10^{-10}$

b) $5^{-10} = 0,0000001024 = 1,024 \cdot 10^{-7}$

c) $3^{-20} = 2,8679719907924413133222572312408 \cdot 10^{-10}$

d) $7^{-15} = 2,1063444842276644111559866596517 \cdot 10^{-13}$

- 102** ●●● Reflexiona y responde.

a) ¿En qué casos ocurre que $\sqrt{a} < a$?

b) ¿Y en qué casos ocurre que $\sqrt{a} > a$?

a) $\sqrt{a} < a$, cuando $0 < a < 1$.

b) $\sqrt{a} > a$, cuando $a > 1$.

103 Racionaliza.

$$\text{a) } \frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}} \qquad \text{b) } \frac{1}{1 - \sqrt[3]{a}}$$

$$\text{a) } \frac{1}{1 + \sqrt[3]{a}} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{(1 + \sqrt[3]{a}) \cdot (1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})} = \frac{1 - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{1 + a}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1 - \sqrt[3]{a}} = \frac{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{(1 - \sqrt[3]{a}) \cdot (1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})} = \frac{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{1 - a}$$

104 Explica cómo se racionalizan las fracciones del tipo $\frac{1}{\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}} = \frac{(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b})}{(\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}) \cdot (\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b})} = \frac{(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b})}{\sqrt[2n]{a^2} - \sqrt[2n]{b^2}}$$

Volvemos a racionalizar hasta que eliminamos totalmente las raíces del denominador

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{b}} &= \frac{(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b})}{\sqrt[2n]{a^2} - \sqrt[2n]{b^2}} = \frac{(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b}) \cdot (\sqrt[2n-2]{a} + \sqrt[2n-2]{b})}{\sqrt[2n-4]{a^4} - \sqrt[2n-4]{b^4}} = \dots \\ &\dots = \frac{(\sqrt[2n]{a} + \sqrt[2n]{b}) \cdot (\sqrt[2n-2]{a} + \sqrt[2n-2]{b}) \cdot \dots \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \end{aligned}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

- 105 Un equipo de ingenieros aeronáuticos va a presentar un proyecto para la construcción de un nuevo avión. Por ello quieren construir una maqueta. Sin embargo, se han encontrado con un problema.

¿Te has fijado en esta pieza?
Es un rectángulo de 6 cm
de largo, pero su ancho...

Sí, es cierto; debe
medir $\sqrt{5}$ cm.



Potencias y radicales

Para no cometer errores en la construcción, se plantean cómo trazar un segmento que mida exactamente $\sqrt{5}$ cm.

Así, el equipo ha resuelto el problema para poder realizar la maqueta.

Otra de las piezas va a ser un rectángulo que mida

$\frac{7 + \sqrt{7}}{2}$ cm de largo

y $4\sqrt{2}$ cm de ancho.

¿Cómo conseguirán dibujarlo con precisión?

Podemos trazar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 cm y 2 cm, y utilizar el teorema de Pitágoras.



Una vez conocido el segmento de $\sqrt{5}$ cm, trazamos el segmento de $\sqrt{6}$ cm mediante un triángulo rectángulo, de catetos 1 cm y $\sqrt{5}$ cm, y se hace lo mismo con el segmento de $\sqrt{7}$ cm con un triángulo de catetos 1 cm y $\sqrt{6}$ cm.

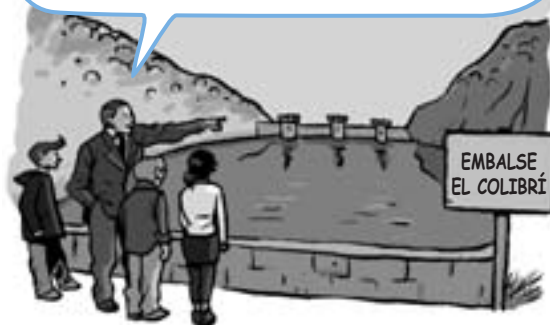
Teniendo el segmento de $\sqrt{7}$ cm, le añadimos 7 cm prolongando la recta, con lo que resulta un segmento de $7 + \sqrt{7}$ cm.

Trazamos la mediatriz del segmento y conseguimos un segmento de $\frac{7 + \sqrt{7}}{2}$ cm.

Para el otro lado del rectángulo, trazamos primero un segmento de $\sqrt{2}$ cm, mediante un triángulo rectángulo de catetos 1 cm, y proyectamos cuatro veces el segmento utilizando un compás, por lo que conseguimos un segmento de $4\sqrt{2}$ cm.

106 Para motivar a los alumnos de un centro escolar sobre el excesivo consumo que se hace del agua, los profesores han organizado una visita al embalse de su región.

Para que os hagáis una idea precisa de la capacidad del embalse, imaginad que es la misma que la de un cubo de 210 metros de arista... ¡El doble del largo de un campo de fútbol!



Los alumnos miran sorprendidos el panel con los datos del embalse.



- a) Justifica si el guía ha hecho bien los cálculos.
b) Al final de la visita, el profesor decide entregarles este folleto.



¿Cuántos metros medirá el lado de un cubo con esta capacidad?

- a) Si el cubo tiene 210 m de arista, su capacidad es de $210^3 \text{ m}^3 = 9.261.000 \text{ m}^3 = 9,261 \text{ hm}^3$.
Por tanto, el guía no ha realizado bien el cálculo de la arista.
- b) $1.452.000 \text{ litros} = 1.452.000 \text{ dm}^3 = 1.452 \text{ m}^3$
La arista del cubo mide $\sqrt[3]{1.452} = 11,324 \text{ m}$.