

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El último Catón

El calor era infernal, apenas quedaba aire y ya casi no veía, y no sólo por las gotas de sudor que me caían en los ojos, sino porque estaba desfallecida. Notaba un dulce sopor, un sueño ardiente que se apoderaba de mí, dejándome sin fuerza. El suelo, aquella fría plancha de hierro que nos había recibido al llegar, era un lago de fuego que deslumbraba. Todo tenía un resplandor anaranjado y rojizo, incluso nosotros. [...]

Pero, entonces, lo comprendí. ¡Era tan fácil! Me bastó echar una última mirada a las manos que Farag y yo teníamos entrelazadas: en aquel amasijo, húmedo por el sudor y brillante por la luz, los dedos se habían multiplicado... A mi cabeza volvió, como en un sueño, un juego infantil, un truco que mi hermano Cesare me había enseñado cuando era pequeña para no tener que aprender de memoria las tablas de multiplicar. Para la tabla del nueve, me había explicado Cesare, sólo había que extender las dos manos, contar desde el dedo meñique de la mano izquierda hasta llegar al número multiplicador y doblar ese dedo. La cantidad de dedos que quedaba a la izquierda, era la primera cifra del resultado, y la que quedaba a la derecha, la segunda.

Me desasí del apretón de Farag, que no abrió los ojos, y regresé frente al ángel. Por un momento creí que perdería el equilibrio, pero me sostuvo la esperanza. ¡No eran seis y tres los eslabones que había que dejar colgando! Eran sesenta y tres. Pero sesenta y tres no era una combinación que pudiera marcarse en aquella caja fuerte. Sesenta y tres era el producto, el resultado de multiplicar otros dos números, como en el truco de Cesare, ¡y eran tan fáciles de adivinar!: ¡los números de Dante, el nueve y el siete! Nueve por siete, sesenta y tres; siete por nueve, sesenta y tres, seis y tres. No había más posibilidades. Solté un grito de alegría y empecé a tirar de las cadenas. Es cierto que desvariaba, que mi mente sufría de una euforia que no era otra cosa que el resultado de la falta de oxígeno. Pero aquella euforia me había proporcionado la solución: ¡Siete y nueve! O nueve y siete, que fue la clave que funcionó. [...] La losa con la figura del ángel se hundió lentamente en la tierra, dejando a la vista un nuevo y fresco corredor.

MATILDE ASENSI

Justifica algebraicamente por qué funciona el *truco* para la tabla de multiplicar por 9 y demuestra que no existe un *truco* parecido para multiplicar por un número distinto de 9.

En la tabla del nueve, a medida que vamos multiplicando por un número mayor, sumamos una unidad en las decenas y restamos otra unidad en las unidades:

$$9 \cdot n = n(10 - 1) = 10n - n$$

Por este motivo funciona el *truco*.

En las tablas de multiplicar, desde la tabla del uno hasta la tabla del ocho, a medida que vamos multiplicando por un número mayor no siempre sumamos una unidad en las decenas.

ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

- 001 Pon un ejemplo de polinomio de grado 4 y con término independiente -5 .
Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.

Respuesta abierta.

$$P(x) = x^4 - x^3 + 5x - 5$$

$$P(2) = 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 5 = 13$$

$$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 5 \cdot (-1) - 5 = -8$$

- 002 Sacar factor común a las siguientes expresiones.

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1)$

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z = 4xz(xy^2z^2 - 3z - 5y^4)$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)(2x - 8 - 1) =$
 $= (3x^2 - 1)(2x - 9)$

- 003 Realiza esta división por la regla de Ruffini.

$$(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$$

-2	4	0	-12	0	-20	2
	-8	16	-8	16	8	
	4	-8	4	-8	-4	$\boxed{10}$

- 004 Indica los elementos de esta ecuación.

$$(x + 2) \cdot (x - 5) + 2 = 7 - x^2$$

Términos: x^2 ; $-3x$; -8 ; 7 ; $-x^2$

Primer miembro: $(x + 2) \cdot (x - 5) + 2$

Multiplicando el primer miembro: $x^2 - 3x - 8$

Segundo miembro: $7 - x^2$

Incógnita: x

Grado: 2

Soluciones: $x_1 = -2,09$; $x_2 = 3,59$

- 005 ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $\frac{x+4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5-x}{2}$?

a) $x = 1$

b) $x = 5$

c) $x = -2$

d) $x = 2$

La solución de la ecuación es la del apartado d), $x = 2$.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

006 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-1}{7} = \frac{x}{2}$

c) $\frac{4(x-3)}{2} - \frac{5(x+8)}{6} = 6(x+3) - 2$

b) $\frac{3(x-2)}{2} - (2x-1) = 0$

d) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \frac{x+4}{7} - 2(x+4)$

a) $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-1}{7} = \frac{x}{2} \rightarrow 28x - 14 - 6x + 6 = 21x \rightarrow x = 8$

b) $\frac{3(x-2)}{2} - (2x-1) = 0 \rightarrow 3x - 6 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -4$

c) $\frac{4(x-3)}{2} - \frac{5(x+8)}{6} = 6(x+3) - 2 \rightarrow 12x - 36 - 5x - 40 = 36x + 108 - 12 \rightarrow x = -\frac{172}{29}$

d) $3\left(x - \frac{2}{3}\right) + 4(2x-1) = \frac{x+4}{7} - 2(x+4) \rightarrow 21x - 14 + 56x - 28 = x + 4 - 14x - 56 \rightarrow x = -\frac{1}{9}$

ACTIVIDADES

001 Calcula estos números combinatorios.

a) $\binom{7}{2}$

b) $\binom{7}{5}$

c) $\binom{12}{3}$

d) $\binom{8}{7}$

a) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

c) $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

b) $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

d) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{7! \cdot 1!} = 8$

002 Desarrolla las siguientes potencias, utilizando el binomio de Newton.

a) $(2x-5)^3$

b) $(x^3+2x)^5$

a) $(2x-5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

b) $(x^3+2x)^5 = x^{15} + 10x^{13} + 40x^{11} + 80x^9 + 80x^7 + 32x^5$

003 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio

$P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.

a) $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x = -1$

d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Por tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

004 Calcula las raíces enteras de estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 1$

b) $Q(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & -9 & -1 & 105 \\ & & 7 & -14 & -105 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \\ 5 & & 5 & 15 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

La raíz entera del polinomio es: 1

Las raíces enteras del polinomio son: $\{-3, 5, 7\}$

005 Factoriza estos polinomios.

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = 2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)(x - 4)(3x - 2)$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(x + 3)(x + 4)(2x + 1)$

006 Encuentra las raíces enteras de los polinomios.

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$

b) $x^4 - 8x^2 - 9$

c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 9 & 12 & 4 \\ & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & & -4 & -1 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

La única raíz entera es: -2

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Esta raíz no es entera.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -8 & 0 & -9 \\ & & -3 & 9 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-3, 3\}$

c) Sacamos factor común: $2x^2(x^3 + 5x^2 + 14x + 16)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 14 & 16 \\ & & -2 & -6 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-2, 0\}$

007 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\frac{3x^2 - 5x}{3x}$

b) $\frac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x}$

a) $\frac{3x^2 - 5x}{3x} = \frac{3x - 5}{3}$

b) $\frac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x} = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x + 3}$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

008 Realiza esta operación y simplifica el resultado.

$$\frac{3}{3x^2 + 6x} + \frac{1}{x} - \frac{2-x}{6x+12}$$
$$\frac{3}{3x^2 + 6x} + \frac{1}{x} - \frac{2-x}{6x+12} = \frac{x^2 + 4x + 18}{6x(x+2)}$$

009 Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

- a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ f) $3x^2 - 18x = 0$
b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$ g) $4x^2 - 36 = 0$
c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$ h) $-8x^2 + 40 = 0$
d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ i) $-5x^2 + 30x = 0$
e) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$ j) $3x^2 = 2x^2$

a) Ecuación completa:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$$
$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2 + 20x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$
$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm 16}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2 + 9x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$
$$\rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9 + \sqrt{129}}{6} = 0,39 \\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{129}}{6} = -3,39 \end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$
$$\rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e) Ecuación completa:

$$-2x^2 + 5x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-39}}{-4}$$

No tiene soluciones reales.

f) Ecuación incompleta:

$$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

g) Ecuación incompleta:

$$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$

h) Ecuación incompleta:

$$-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$$

i) Ecuación incompleta:

$$-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

j) Ecuación incompleta:

$$3x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

010 Resuelve estas ecuaciones.

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0$

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 33 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 20}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = 2$$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

$$0 = 0 \rightarrow \text{No es una ecuación, es una identidad.}$$

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0 \rightarrow -2x^2 - 7x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{7 \pm \sqrt{177}}{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7 + \sqrt{177}}{4} = 1,58 \\ x_2 = \frac{-7 - \sqrt{177}}{4} = -5,08 \end{cases}$$

013 Halla la solución de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1}$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3-x^2}{x^2} = 0$

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1} \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3-x^2}{x^2} = 0 \rightarrow -x^4 + 3x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} -z^2 + 3z + 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \rightarrow$ No tiene solución real.

$z_2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

014 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$

b) $x^2 - \sqrt{3x^2 - 2} = 4$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = \sqrt{8x+4}$

d) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 = 0$

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6 \rightarrow 2x-1 = x+4 - 12\sqrt{x+4} + 36$
 $\rightarrow (x-41)^2 = (-12\sqrt{x+4})^2 \rightarrow x^2 - 226x + 1.105 = 0$

$$x = \frac{-(-226) \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 221 \end{cases}$$

La solución es $x = 5$.

b) $x^2 - \sqrt{3x^2 - 2} = 4 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 3x^2 - 2 \rightarrow x^4 - 11x^2 + 18 = 0$
 $\xrightarrow{z=x^2} z^2 - 11z + 18 = 0$

$$z = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$

$z_2 = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{2} \quad x_4 = -\sqrt{2}$

Las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{x} + \sqrt{x+12} &= \sqrt{8x+4} \rightarrow x + 2\sqrt{x^2+12x} + x + 12 = 8x + 4 \\ &\rightarrow 4x^2 + 48x = 36x^2 - 96x + 64 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 7}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

La solución es $x = 4$.

$$\begin{aligned} \text{d) } 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 &= 0 \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2 = (3\sqrt{4x-3} - 5)^2 \\ &\rightarrow (6 - 32x)^2 = (-30\sqrt{4x-3})^2 \rightarrow 64x^2 - 249x + 171 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-249) \pm \sqrt{(-249)^2 - 4 \cdot 64 \cdot 171}}{2 \cdot 64} = \frac{249 \pm 135}{256} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{57}{64} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La solución es $x = 3$.

015 Estas ecuaciones aparecen factorizadas. Encuentra su solución.

a) $3(x-1)(x+2)(x-4) = 0$

d) $2x^2(x-3)^2(3x+4) = 0$

b) $x(x-2)(x+3)(x-12) = 0$

e) $5x(x-1)^2(2x+7)^3 = 0$

c) $(2x-1)(4x+3)(x-2) = 0$

a) $x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 4$

d) $x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -\frac{4}{3}$

b) $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -3 \quad x_4 = 12$

e) $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -\frac{7}{2}$

c) $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{4} \quad x_3 = 2$

016 Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4) = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x+4)^2(x^2+1) = 0$

$x = -4$

017 Escribe una ecuación que tenga como soluciones: $x = 3$, $x = 2$ y $x = -7$.
¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?

Respuesta abierta.

$$(x-3)(x-2)(x+7) = 0$$

El mínimo grado que puede tener es 3.

018 Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array} \right\} \end{array}$$

Escoge el método que consideres más adecuado.

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{3y}{2}$$

$$6 \cdot \frac{-3y}{2} - 9y = -6 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{-3 \cdot \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left. \begin{array}{l} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \end{array} \right\}$$

Sumamos las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \end{array} \right\} \\ \hline -16q = 8 \rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5p + 2 \cdot \frac{-1}{2} = 1 \rightarrow p = \frac{2}{5}$$

019 Halla las soluciones de estos sistemas.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) = 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-5}{3} + \frac{2y-1}{5} = 2 \\ 3(2-x) + 4(y+1) = 36 \end{array} \right\}$$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left. \begin{array}{l} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 2x - 5y = -14 \end{array} \right\}$$

Resolvemos por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 2x - 5y = -14 \end{array} \right\} \\ \hline -4y = -12 \rightarrow y = 3$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$-2x + 3 = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-5}{3} + \frac{2y-1}{5} = 2 \\ 3(2-x) + 4(y+1) = 36 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 58 \\ -3x + 4y = 26 \end{array} \right\}$$

Resolvemos por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 58 \\ -3x + 4y = 26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{-3} \\ \xrightarrow{-5} \end{array} \left. \begin{array}{l} 15x + 18y = 174 \\ -15x + 20y = 130 \end{array} \right\} \underline{\hspace{1cm}} \\ 38y = 304 \rightarrow y = 8$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5x + 6 \cdot 8 = 58 \rightarrow x = 2$$

020 Clasifica estos sistemas de ecuaciones, y resuélvelos por el método más adecuado.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 8x - 2y = 4 \\ -12x + 3y = -6 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} p + 2q = 1 \\ 3p - q = 11 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 8x - 2y = 4 \\ -12x + 3y = -6 \end{array} \right\} \rightarrow y = 4x - 2$$

Sistema compatible indeterminado: $y = 4x - 2$.

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} p + 2q = 1 \\ 3p - q = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \xrightarrow{-3} \end{array} \left. \begin{array}{l} -3p - 6q = -3 \\ 3p - q = 11 \end{array} \right\} \underline{\hspace{1cm}} \\ -7q = 8 \rightarrow q = -\frac{8}{7}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$p - \frac{16}{7} = 1 \rightarrow p = \frac{23}{7}$$

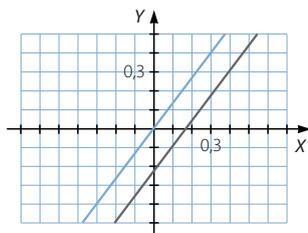
Sistema compatible determinado.

021 Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.

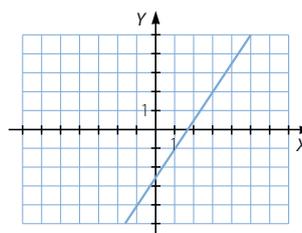
$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} -12x + 9y = -2 \\ 8x - 6y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 21a - 14b = 35 \\ -12a + 8b = -20 \end{array} \right\}$$

a) Sistema incompatible.



b) Sistema compatible determinado.



022 Resuelve los sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{cases} \rightarrow x = 20 - y$$

$$(20 - y)^2 + y^2 = 202 \rightarrow y^2 - 20y + 99 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 11 \\ y_2 = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$x_1 = 20 - 11 = 9$$

$$x_2 = 20 - 9 = 11$$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{cases} \rightarrow x = 13 - 2y$$

$$(13 - 2y)^2 + (13 - 2y)y = 24 \rightarrow 2y^2 - 39y + 145 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = \frac{29}{2} \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$x_1 = 13 - 2 \cdot 5 = 3 \quad x_2 = 13 - 2 \cdot \frac{29}{2} = -16$$

023 Calcula dos números, sabiendo que su suma es 42 y la suma de sus inversos es $\frac{7}{72}$.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{72} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 42 - y \\ 72y + 72x = 7xy \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$72y + 72(42 - y) = 7(42 - y)y \rightarrow y^2 - 42y + 432 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 18 \\ y_2 = 24 \end{cases}$$

$$x_1 = 42 - 18 = 24$$

$$x_2 = 42 - 24 = 18$$

Los números pedidos son 18 y 24.

024 Resuelve la siguiente inecuación: $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$

Razona los pasos realizados para resolverla.

- Resolvemos la ecuación: $\frac{1}{2}x - 4 = 3x + 1 \rightarrow x = -2$

- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:

$$x = -4 \text{ de } (-\infty, -2) \quad x = 0 \text{ de } (-2, +\infty)$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

- Comprobamos si esos puntos son soluciones:

$$\text{Si } x = -4 \rightarrow -6 = \frac{-4}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-4) + 1 = -11 \rightarrow (-\infty, -2) \text{ es solución.}$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow -4 \geq 1 \rightarrow (-2, +\infty) \text{ no es solución:}$$

- Comprobamos si el extremo es solución.

$$\text{Si } x = -2 \rightarrow -5 = \frac{-2}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \rightarrow x = -2 \text{ es solución.}$$

Por tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $(-\infty, -2]$.

025 Encuentra el error cometido en la resolución de esta inecuación.

$$2x \leq 8x - 12$$

$$-6x \leq -12 \rightarrow 6x \leq 12 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2)$$

Al pasar del segundo al tercer paso, se ha multiplicado la ecuación por -1 , y se debería haber cambiado el sentido de la desigualdad, por las relaciones de orden que cumplen los números reales.

026 Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ | f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$ |
| b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ | g) $(x + 3)x < 4$ |
| c) $x^2 - 9x > 0$ | h) $x^2 - 30 > x$ |
| d) $x^2 - 9 < 0$ | i) $x^2 + x + 3 < 0$ |
| e) $x^2 + 2 \leq 0$ | j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ |

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = 0 \quad x = 1,5 \quad x = 3$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \text{ no es solución de la inecuación.}$$

$$\text{Si } x = 1,5 \rightarrow 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2) \text{ es solución de la inecuación.}$$

$$\text{Si } x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty) \text{ no es solución de la inecuación.}$$

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

- b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -1 \quad x = 1 \quad x = 10$$

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0) \text{ es solución de la inecuación.}$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9) \text{ no es solución de la inecuación.}$$

$$\text{Si } x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty) \text{ es solución de la inecuación.}$$

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.

Por tanto, la inecuación no tiene solución.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

027 Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.

- a) $(x-2)(x-3)(x^2-2) \geq 0$ c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$
 b) $x(x-4)(x+1)(x^3-1) \leq 0$ d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x-2)(x-3)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 1,5 \quad x = 2,5 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10-2)(-10-3)((-10)^2-2) > 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{2})$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow (0-2)(0-3)(0^2-2) < 0 \rightarrow (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ no es solución.

Si $x = 1,5 \rightarrow (1,5-2)(1,5-3)(1,5^2-2) > 0 \rightarrow (\sqrt{2}, 2)$ es solución.

Si $x = 2,5 \rightarrow (2,5-2)(2,5-3)(2,5^2-2) < 0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow (10-2)(10-3)(10^2-2) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -0,5 \quad x = 0,5 \quad x = 2 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -10 \cdot (-10-4)(-10+1)((-10)^3-1) > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x = -0,5 \rightarrow -0,5 \cdot (-0,5-4)(-0,5+1)((-0,5)^3-1) < 0 \rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x = 0,5 \rightarrow 0,5 \cdot (0,5-4)(0,5+1)(0,5^3-1) > 0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot (2-4)(2+1)(2^3-1) < 0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10 \cdot (10-4)(10+1)(10^3-1) > 0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = 0 \rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 < 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 6 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

$$d) \text{ Resolvemos la ecuación: } x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 2 \quad x = 2,5 \quad x = 10$$

$$\text{Si } x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5 \cdot (-10)^3 + 4 \cdot (-10)^2 + 9 \cdot (-10) - 9 > 0$$

$\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9 < 0 \rightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, 1\right) \text{ no es solución.}$$

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 9 > 0 \rightarrow \left(1, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \text{ es solución.}$$

$$\text{Si } x = 2,5 \rightarrow 2,5^4 - 5 \cdot 2,5^3 + 4 \cdot 2,5^2 + 9 \cdot 2,5 - 9 < 0 \rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 3\right) \text{ no es solución.}$$

$$\text{Si } x = 10 \rightarrow 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty) \text{ es solución.}$$

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

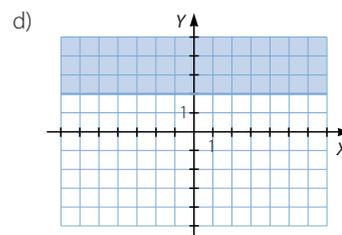
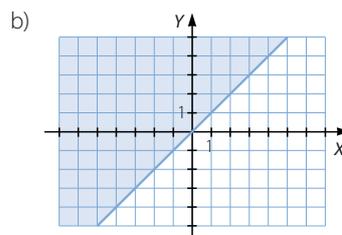
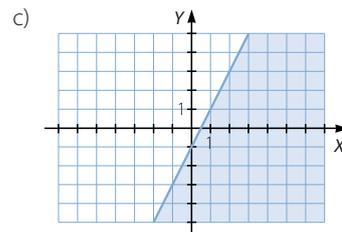
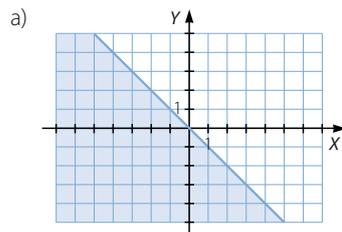
028 Representa en el plano la región solución de estas inecuaciones.

a) $x + y < 0$

c) $2x - y > 1$

b) $x - y \leq 0$

d) $y - 2 \geq 0$



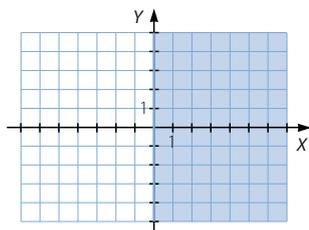
Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

029 Dibuja las siguientes regiones del plano.

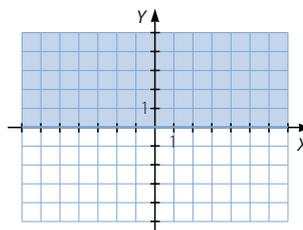
- a) Los puntos del plano con abscisa positiva.
 b) Los puntos del plano con ordenada mayor o igual que cero.

Encuentra una inecuación que tenga cada una de esas regiones como conjunto solución.

a) $x > 0$



b) $y \geq 0$



030 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 6 \end{cases}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $(2, +\infty)$.

b) $\begin{cases} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -\frac{6}{11} \end{cases}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left[-\frac{6}{11}, +\infty\right)$.

031 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} x^2 - 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{33}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \\ \frac{-2 - \sqrt{22}}{6} \leq x \leq \frac{-2 + \sqrt{22}}{6} \end{cases}$

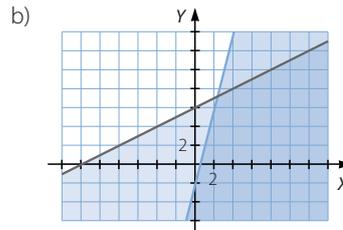
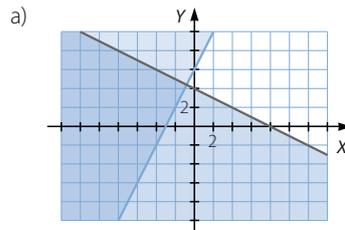
Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left[\frac{-2 - \sqrt{22}}{6}, \frac{-2 + \sqrt{22}}{6}\right]$

b) $\begin{cases} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{cases} \rightarrow$ Siempre se cumplen.

Son ciertas para todos los números reales.

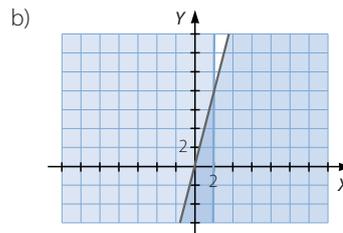
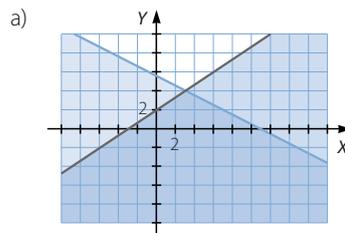
032 Calcular las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y < 4 \\ -2x + y \geq 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 12x - 3y \geq 7 \\ -x + 2y \leq 12 \end{cases}$$



033 Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y < 11 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y \geq 0 \\ x < 2 \end{cases}$$



034 Calcular $3!$, $4!$, $5!$, $6!$ y $7!$, y comprobar si son ciertas las siguientes expresiones.

$$\text{a) } 2! \cdot 3! = 6! \quad \text{b) } 3! + 4! = 7! \quad \text{c) } 6! - 2! = 4!$$

$$3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720 \quad 7! = 5.040$$

$$\text{a) } 2! \cdot 3! = 12 \quad 6! = 720 \quad \text{b) } 3! + 4! = 30 \quad 7! = 5.040 \quad \text{c) } 6! - 2! = 718 \quad 4! = 24$$

Por tanto, ninguna expresión es cierta.

035 Simplificar las expresiones sin hallar previamente el valor de los factoriales.

$$\text{a) } \frac{6!}{4!} \quad \text{b) } \frac{9!}{6!} \quad \text{c) } \frac{(a+2)!}{a!} \quad \text{d) } \frac{8!}{4!} \quad \text{e) } \frac{10!}{7! \cdot 3!} \quad \text{f) } \frac{x!}{(x-3)!}$$

$$\text{a) } \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$$

$$\text{b) } \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

$$\text{c) } \frac{(a+2)!}{a!} = (a+2)(a+1) = a^2 + 3a + 2$$

$$\text{d) } \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$$

$$\text{e) } \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

$$\text{f) } \frac{x!}{(x-3)!} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

036

•••

Calcula las incógnitas y comprueba estas igualdades.

a) $\binom{8}{x} = \binom{8}{6}$ b) $\binom{x}{3} = \binom{x}{7}$ c) $\binom{a}{x} = \binom{a}{5}$

a) No consideramos la solución trivial $x = 6$.

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \binom{8}{2}$$

b) $\binom{10}{7} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \binom{10}{3}$

c) $\binom{a}{5} = \frac{a!}{(a-5) \cdot 5!} = \binom{a}{a-5}$

037

•••

Completa los siguientes desarrollos.

a) $(3x + 2)^4 = 81x^4 + \square x^3 + \square + 96\square + 16$

b) $(3 - 4y)^3 = 27 - \square y + 144\square + \square$

c) $(2p - q^2)^4 = 16p^4 - 32p^3q^2 + 24p^2q^4 + \square + q^8$

d) $(3mn - p^2)^3 = \square m^3n^3 - 27m^2n^2p^2 + \square mnp^4 - p^6$

a) $(3x + 2)^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(3 - 4y)^3 = 27 - 108y + 144y^2 - 64y^3$

c) $(2p - q^2)^4 = 16p^4 - 32p^3q^2 + 24p^2q^4 - 8pq^6 + q^8$

d) $(3mn - p^2)^3 = 27m^3n^3 - 27m^2n^2p^2 + 9mnp^4 - p^6$

038

•••

Sabiendo que $5,1 = 5 + 0,1$ y que $0,99 = 1 - 0,01$; calcula el valor de $5,1^3$ y $0,99^2$ empleando la fórmula del binomio de Newton.

$$5,1^3 = (5 + 0,1)^3 = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 5 \cdot 0,1^2 + 0,1^3 = \\ = 125 + 7,5 + 0,15 + 0,001 = 132,651$$

$$0,99^2 = (1 - 0,01)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0,01 + 0,01^2 = 1 - 0,02 + 0,0001 = 0,9801$$

039

•••

Determina los términos que se indican en estos desarrollos.

a) Séptimo término de $(x + 2y)^{10}$.

c) Decimosexto término de $(2p + q^2)^{28}$.

b) Décimo término de $(x^2 - 3)^{15}$.

d) Decimocuarto término de $(-a + 2)^{21}$.

a) $13.440x^4y^6$

c) $306.726.174.720p^{13}q^{30}$

b) $-98.513.415x^{12}$

d) $1.666.990.080a^8$

040

•••

Halla las potencias cuyo desarrollo da lugar a estas expresiones.

a) $4x^2 + 20x + 25$

b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

c) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16$

a) $(2x + 5)^2$

b) $(3x - 2)^3$

c) $(3p + 2)^4$

041 Encuentra los términos indicados de los siguientes desarrollos.

- a) El término central de $(3p^2 - 2q)^{12}$.
 b) El término que contiene x^{12} en $(2x^2 + 1)^9$.
 c) El término que contiene x^{11} en $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^{10}$.

a) $43.110.144p^{12}q^6$ b) $5.376x^{12}$ c) $-960x^{11}$

042 El séptimo y el octavo términos del desarrollo de una potencia son $1.792x^2y^{12}$ y $1.024xy^{14}$, respectivamente. Intenta descubrir de qué binomio hemos calculado una potencia.

$$(x + 2y^2)^8$$

043 Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible por $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & 4 & -4 \\ & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$$N(x) = 2x^2 - x + 2$$

044 Determina las raíces de los siguientes polinomios.

- a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$ e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$
 b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$ f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$
 c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$ g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$
 d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$

c) $x_1 = -3$ $x_2 = -\frac{2}{3}$ $x_3 = \frac{1}{2}$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 4$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \text{e)} & 1 & 8 & 17 & 10 \\
 -1 & & -1 & -7 & -10 \\
 \hline
 & 1 & 7 & 10 & 0 \\
 -2 & & -2 & -10 & \\
 \hline
 & 1 & 5 & 0 & \\
 -5 & & -5 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & &
 \end{array}$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \text{f)} & 3 & 7 & -22 & -8 \\
 2 & & 6 & 26 & 8 \\
 \hline
 & 3 & 13 & 4 & 0 \\
 -4 & & -12 & -4 & \\
 \hline
 & 3 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

$$3x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad x_3 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{g)} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\
 1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\
 \hline
 & 2 & -9 & 12 & -4 & 0 \\
 2 & & 4 & -10 & 4 & \\
 \hline
 & 2 & -5 & 2 & 0 & \\
 2 & & 4 & -2 & & \\
 \hline
 & 2 & -1 & 0 & &
 \end{array}$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{h)} & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\
 -2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\
 \hline
 & 1 & -6 & 0 & 32 & 0 \\
 -2 & & -2 & 16 & -32 & \\
 \hline
 & 1 & -8 & 16 & 0 & \\
 4 & & 4 & -16 & & \\
 \hline
 & 1 & -4 & 0 & & \\
 4 & & 4 & & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & & &
 \end{array}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 4$$

045
•••

De un polinomio de segundo grado, $P(x)$, se sabe que $P(1) = -6$, $P(0) = -3$ y una de sus raíces es 3. Determinalo.

Obtén el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tenga 2 por raíz.

$$(x - 3)(ax + b) = 0$$

$$\text{Como } P(1) = -6:$$

$$-2a - 2b = -6$$

$$\text{Como } P(0) = -3:$$

$$-3b = -3$$

Por tanto, resulta que $a = 2$ y $b = 1$.

El polinomio pedido es $2x^2 - 5x - 3$.

Y como 2 es raíz:

$$m \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 0 \rightarrow m = 3$$

046
•••

Obtén el valor de n para que el polinomio $2x^3 + 2x^2 + nx + 3$ tenga -3 por raíz.

Como -3 es raíz:

$$2 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + n \cdot (-3) + 3 = 0 \rightarrow n = -11$$

047
•••

¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?

Dividimos el polinomio entre $x - 4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16 + 4a & 52 + 16a \\ \hline & 1 & 4 + a & 13 + 4a & 52 + 15a \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$$

048
•••

Determina a y b de manera que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible por $x - 2$ y por $x + 3$.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4 + 2a & 8 + 4a + 2b \\ \hline & 1 & 2 + a & 4 + 2a + b & 2 + 4a + 2b \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9 - 3a & -27 + 9a - 3b \\ \hline & 1 & -3 + a & 9 - 3a + b & -33 + 9a - 3b \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 4a + 2b = 0 \\ -33 + 9a - 3b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2 \quad b = -5$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

049 ●○○ Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean las que se indican en cada caso.

- a) 2, 3 y 5 b) -2, -1 y 4 c) 2, 2 y -4

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$

b) $Q(x) = (x - 4)(x + 2)(x + 1)$

c) $R(x) = (x + 4)(x - 2)^2$

050 ●○○ Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y -2 y tal que $P(3) = 30$.

$$\left. \begin{array}{l} Q(x) = (x - 1)(x + 2) \\ Q(3) = 10 \end{array} \right\} \rightarrow P(x) = 3(x - 1)(x + 2)$$

051 ●○○ Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, -1 y -1, y tal que $Q(2) = -18$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = (x - 3)(x + 1)^2 \\ P(2) = -9 \end{array} \right\} \rightarrow Q(x) = 2(x - 3)(x + 1)^2$$

052 ●○○ Opera y simplifica.

a) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6}$ b) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3}$ c) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a}$

a) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6} = \frac{11}{6(a+2)}$

b) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3} = \frac{11-p^2}{(p+2)(p+3)}$

c) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a} = \frac{1}{2(a-3)}$

053 ●○○ Realiza las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$ c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b}$
 b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18}$ d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3}$

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12} = \frac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18} = \frac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b} = \frac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3} = 5-2x$

054

Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
 $x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
 $x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
 $x = -\frac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
 $x = \frac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.

c) Sí, la solución es $x = -\frac{3}{2}$.

d) No, esta ecuación no tiene solución real.

055

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\frac{2 - x^2}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{23}{12} = 0$

c) $\frac{x - 2x^2}{2} = 1 - \frac{3x + x^2}{4}$

b) $\frac{2 - x}{2} + \frac{3x^2 - 2x}{3} + \frac{19x}{6} = 0$

d) $\frac{x^2 + x}{5} + \frac{(x + 2)x}{2} = 0$

a) $\frac{2 - x^2}{3} + \frac{3 - x}{4} + \frac{23}{12} = 0 \rightarrow 8 - 4x^2 + 9 - 3x + 23 = 0 \rightarrow -4x^2 - 3x + 40 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 40}}{2 \cdot (-4)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{649}}{8} \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{649}}{8} \end{cases}$$

b) $\frac{2 - x}{2} + \frac{3x^2 - 2x}{3} + \frac{19x}{6} = 0 \rightarrow \frac{6 - 3x}{6} + \frac{6x^2 - 4x}{6} + \frac{19x}{6} = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

c) $\frac{x - 2x^2}{2} = 1 - \frac{3x + x^2}{4} \rightarrow 2x - 4x^2 = 4 - 3x - x^2 \rightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

No tiene solución real.

d) $\frac{x^2 + x}{5} + \frac{(x + 2)x}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x + 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 7x^2 + 12x = 0$

$$x(7x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{12}{7} \quad x_2 = 0$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

056

•••

Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\frac{1-x^2}{x} + \frac{3x+1}{4} + \frac{1}{6} = 0$

b) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{1-4x}{3} + \frac{8}{15} = 0$

c) $\frac{2-x}{2x} = \frac{5}{6} - \frac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{1-x^2}{x} + \frac{3x+1}{4} + \frac{1}{6} = 0 \rightarrow 12 - 12x^2 + 9x^2 + 3x + 2x = 0 \rightarrow -3x^2 + 5x + 12 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 12}}{2 \cdot (-3)} \rightarrow x = \frac{-5 \pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3} + \frac{3 \cdot 3 + 1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{-8}{3} + \frac{10}{4} + \frac{1}{6} = 0$$

b) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{1-4x}{3} + \frac{8}{15} = 0 \rightarrow 15x^2 + 60 + 5x - 20x^2 + 8x = 0$

$$\rightarrow -5x^2 + 13x + 60 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 60}}{2 \cdot (-5)} \rightarrow x = \frac{-13 \pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{12}{5} \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5} + \frac{1-4 \cdot 5}{3} + \frac{8}{15} = \frac{29}{5} - \frac{19}{3} + \frac{8}{15} = 0$$

c) $\frac{2-x}{2x} = \frac{5}{6} - \frac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x = 5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = 1$$

$$\frac{2-1}{2 \cdot 1} - \frac{5}{6} + \frac{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 0$$

057

•••

Resuelve las ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula correspondiente.

a) $x(x+3) - 2(x^2-4) - 8 = 0$

b) $(2x+3)^2 - 8(2x+1) = 0$

a) $x(x+3) - 2(x^2-4) - 8 = 0$

Operamos: $-x^2 + 3x = 0$

Es una ecuación incompleta cuyas soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$.

b) $(2x+3)^2 - 8(2x+1) = 0$

Operamos: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Factorizamos el primer miembro de la ecuación utilizando las igualdades notables:

$$(2x-1)^2 = 0$$

La solución es $x = \frac{1}{2}$.

058
•••

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es -21 .

- a) Escribe la ecuación correspondiente.
b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4 - x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Las soluciones son -3 y 7 .

059
•••

Calcula k en cada caso.

- a) $x^2 + kx + 25 = 0$ tiene una solución.
b) $x^2 - 4x + k = 0$ no tiene soluciones.
c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0 \rightarrow k = 10$

b) $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \rightarrow (4, 8)$

c) $8^2 - 4 \cdot k \cdot 5 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{16}{5}\right)$

060
•••

Resuelve la ecuación de segundo grado utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado con el número de soluciones.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

061
•••

¿Qué valor debe tomar k para que los números indicados sean soluciones de las ecuaciones?

a) $2x^2 + 5x + k = 0$

$$x = \frac{3}{2}$$

b) $k(x^2 - 5x + 1) - 6(x + 2) + 4(k - x) - 65 = 0$

$$x = -2$$

a) $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{3}{2} + k = 0 \rightarrow k = -12$

b) $k[(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 1] - 6 \cdot ((-2) + 2) + 4 \cdot (k - (-2)) - 65 = 0 \rightarrow k = 3$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

062

•••

¿Qué valores deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga dos soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b :

$$\begin{array}{l} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cdot 3 \rightarrow 75a + 15b = 90 \\ \cdot 5 \rightarrow 45a - 15b = 150 \end{array} \right. \\ \hline 120a = 240 \rightarrow a = 2 \\ \rightarrow 9 \cdot 2 - 3b - 30 = 0 \rightarrow b = -4$$

063

•••

Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

c) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b :
 $(x - a)(x - b) = 0$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5 .

Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1 .

Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1 .

Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

d) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1 .

La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

064

•••

Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$

c) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -7$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta abierta.

a) $(x + 4)(x - 2) = 0$

b) $x(x + 7) = 0$

c) $(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

065
●○○

Resuelve las ecuaciones.

a) $\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1} = 0$

b) $\frac{3}{x+2} - \frac{5-x}{x+1} = 0$

c) $\frac{-x+3}{x-1} - \frac{9-x}{x^2-1} = 0$

d) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2$

e) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{1-2x}{x^2-x-6} = 0$

a) $\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1} = 0 \rightarrow 2x-3+x^2-4x+3=0 \rightarrow x^2-2x=0$

$x_1=0 \quad x_2=2$

b) $\frac{3}{x+2} - \frac{5-x}{x+1} = 0 \rightarrow 3x+3+x^2-3x-10=0 \rightarrow x^2-7=0$

$x_1=-\sqrt{7} \quad x_2=\sqrt{7}$

c) $\frac{-x+3}{x-1} - \frac{9-x}{x^2-1} = 0 \rightarrow -x^2+2x+3-9+x=0 \rightarrow x^2-3x+6=0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2 \rightarrow x+x^2-3x+2=3x+6-2x^2+8$

$\rightarrow 3x^2-5x-12=0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 13}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

e) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{1-2x}{x^2-x-6} = 0 \rightarrow x^2+6x+8-1+2x=0 \rightarrow x^2+8x+7=0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-7 \end{cases}$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

066



Estas ecuaciones tienen menos de cuatro soluciones. Determinálas.

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0$

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0$

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 8z^2 + 26z + 15 = 0$

$$z = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 8 \cdot 15}}{2 \cdot 8} = \frac{-26 \pm 14}{16} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{4} \\ z_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

No tiene solución real.

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 9z^2 + 80z - 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-9)}}{2 \cdot 9} = \frac{-80 \pm 82}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{9} \\ z_2 = -9 \end{cases}$$

$$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$z_2 = -9 \rightarrow$ No tiene solución real.

c) $6 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^4} = 0 \rightarrow 6x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 6z^2 - 5z + 2 = 0$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{12}$$

No tiene solución real.

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \rightarrow -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} -9z^2 + 80z + 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 9}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-80 \pm 82}{-18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$

$z_2 = -\frac{1}{9} \rightarrow$ No tiene solución real.

067



Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a) $\frac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \frac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3}$

d) $\frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

$$a) \frac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$

$$z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$$

$$b) 3x^2(x^2 - 2) = \frac{x^2 - 2}{3} \rightarrow 9x^4 - 19x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 9z^2 - 19z + 2 = 0$$

$$z = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2}}{2 \cdot 9} = \frac{19 \pm 17}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$z_1 = 2 \rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{9} \rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{1}{3}$$

$$c) 8x + \frac{12}{x} = \frac{20}{x^3} \rightarrow 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2 + 3z - 5 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$$d) \frac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2 \rightarrow 6x^4 - 2x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 6z^2 - 2z + 9 = 0$$

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 9}}{2 \cdot 6} = \frac{2 \pm \sqrt{-212}}{12}$$

No tiene solución real.

068
●●○

Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan estas soluciones.

$$a) \sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \square$$

$$x = 2$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \square - \frac{1}{\sqrt{4x}}$$

$$x = 4$$

$$a) \sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} = \frac{13}{12} - \frac{1}{\sqrt{4x}}$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

069



Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x + \sqrt{2x + 3} = 6$

c) $\frac{\sqrt{2x-2}}{x-5} = 1$

b) $2\sqrt{3x+1} - 2x + 2 = 0$

d) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} - 2 = 0$

a) $x + \sqrt{2x + 3} = 6 \rightarrow 2x + 3 = x^2 - 12x + 36 \rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 11 \end{cases}$$

$$x = 3 \rightarrow 3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 6$$

$$x = 11 \rightarrow 11 + \sqrt{2 \cdot 11 + 3} \neq 6$$

b) $2\sqrt{3x+1} - 2x + 2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 20x = 0$

$$x = 5 \rightarrow 2\sqrt{3 \cdot 5 + 1} - 2 \cdot 5 + 2 = 2 \cdot 4 - 10 + 2 = 0$$

$$x = 0 \rightarrow 2\sqrt{3 \cdot 0 + 1} - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \neq 0$$

c) $\frac{\sqrt{2x-2}}{x-5} = 1 \rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x = 9 \rightarrow \frac{\sqrt{2 \cdot 9 - 2}}{9 - 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{\sqrt{2 \cdot 3 - 2}}{3 - 5} = \frac{2}{-2} \neq 1$$

d) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} - 2 = 0 \rightarrow x + 2 = x - 6 + 4\sqrt{x-6} + 4 \rightarrow 1 = x - 6$

$$x = 7 \rightarrow \sqrt{7+2} - \sqrt{7-6} - 2 = 3 - 1 - 2 = 0$$

070



Estas ecuaciones tienen cero, una o dos soluciones. Determinálas.

a) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} - 5 = 0$

d) $\frac{3}{1+\sqrt{x}} = \frac{5-\sqrt{x}}{3}$

b) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-2} = 2$

e) $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-5} + 1 = 0$

c) $\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x+8} = 0$

a) No tiene solución.

b) Tiene dos soluciones: $x_1 = 2$ $x_2 = 6$

c) Tiene dos soluciones: $x_1 = 2$ $x_2 = -4$

d) Tiene una solución: $x = 4$

e) No tiene solución.

071
•••

Las ecuaciones tienen tres soluciones. Dada una solución, calcula las otras dos soluciones.

a) $(x+3)(x^2-2x-3)=0$
 $x=-3$

b) $(2a-1)(4a^2+20a+25)=0$
 $a=\frac{1}{2}$

a) Resolvemos la ecuación $x^2-2x-3=0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Resolvemos la ecuación $4a^2+20a+25=0$:

$$a = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} = \frac{20}{8} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

072
•••

Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

b) $x^2(x+6)=32$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & & 0 \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & & & 0 \end{array}$$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 1$

b) $x^2(x+6)=32 \rightarrow x^3+6x^2-32=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & 8 & 16 & 0 \\ -4 & & -4 & -16 & \\ \hline & 1 & 4 & & 0 \\ -4 & & -4 & & \\ \hline & 1 & & & 0 \end{array}$$

$x_1 = -4 \quad x_2 = 2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1) \rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 1 & 4 & -3 & -18 & 0 \\ 2 & & 2 & 12 & 18 & \\ \hline & 1 & 6 & 9 & & 0 \\ -3 & & -3 & -9 & & \\ \hline & 1 & 3 & & & 0 \\ -3 & & -3 & & & \\ \hline & 1 & & & & 0 \end{array}$$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{d)} & 2 & -5 & -14 & 8 \\ -2 & & -4 & 18 & -8 \\ \hline & 2 & -9 & 4 & 0 \\ 4 & & 8 & -4 & \\ \hline & 2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 4$$

073
••○

Escribe ecuaciones factorizadas que tengan las soluciones y el grado indicados.

- a) Grado 3 y soluciones 5, -2 y 7. b) Grado 4 y soluciones 1, -3 y -4.

Respuesta abierta.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 7) = 0$

b) $(x - 1)^2(x + 3)(x + 4) = 0$

074
••○

Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

$$\text{a)} \begin{array}{r|rrrr} & 6 & -7 & -1 & 2 \\ 1 & & 6 & -1 & -2 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = 1$$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1) \rightarrow 4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\ -2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\ \hline & 4 & -20 & 19 & 15 & 0 \\ 3 & & 12 & -24 & -15 & \\ \hline & 4 & -8 & -5 & & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2 - 8x - 5 = 0$:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = -2 \quad x_3 = \frac{5}{2} \quad x_4 = 3$$

$$c) x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2$$

075
●●○

Resuelve estas ecuaciones.

$$a) \frac{x^3 + x^2}{3} + x \frac{x+1}{6} = x+1$$

$$d) \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$b) 3x^2 \left(4 + \frac{7}{x} \right) = \frac{6(17x-4)}{x}$$

$$e) \frac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2+1} = 3$$

$$c) \frac{x^2}{16}(x+7) + x + 1 = 0$$

$$a) \frac{x^3 + x^2}{3} + x \frac{x+1}{6} = x+1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = \frac{3}{2}$$

$$b) 3x^2 \left(4 + \frac{7}{x} \right) = \frac{6(17x-4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & 0 \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = \frac{1}{4} \quad x_3 = 2$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

$$c) \frac{x^2}{16}(x+7) + x + 1 = 0 \rightarrow x^3 + 7x^2 + 16x + 16 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 3x + 4 = 0$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$$x = -4$$

$$d) \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \rightarrow -5x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -5 & 8 & 3 & 2 \\ & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2 - 2x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{-10} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$$x = 2$$

$$e) \frac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3 \rightarrow 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 4 & -3 \\ & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2 - x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$$x = 3$$

076
•••

Del siguiente sistema de ecuaciones se sabe que $x = -1$ forma parte de su solución. Determina el valor de y .

$$\left. \begin{array}{l} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y) + 6 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ 2x - 5y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow y = 0$$

077
•••

Resuelve los siguientes sistemas.

$$a) \left. \begin{array}{l} -2(x + 4) + 3(3 - 2y) - 1 = 12 \\ 5(x + y) - 4(x + 1) - 2y + 10 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 6(x - 2y - 3) - 3(2x + y - 3) + x + 7 &= 0 \\ 3(x - 6y) - 2(x - y) + y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} \frac{2x+3}{3} + \frac{y+1}{5} &= 3 \\ \frac{x-5}{2} - \frac{2y-1}{3} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} \frac{x+3}{9} - \frac{y-5}{8} &= 0 \\ \frac{2x-y+1}{2} - \frac{x+2y-3}{5} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{e) } \left. \begin{aligned} -(2x + 3y - 2) - 6(x - y + 1) &= -15 \\ 4(x + 3) - 12(x - y + 3) &= -32 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{f) } \left. \begin{aligned} 6(x + 2y - 3) - 5(-2x + 3y - 1) + 3 &= 6 \\ 16 &= \frac{3y}{x-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} -2(x + 4) + 3(3 - 2y) - 1 &= 12 \\ 5(x + y) - 4(x + 1) - 2y + 10 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} -2x - 6y = 12 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -3y - 6$$

Sistema compatible indeterminado.

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 6(x - 2y - 3) - 3(2x + y - 3) + x + 7 &= 0 \\ 3(x - 6y) - 2(x - y) + y &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - 15y = 2 \\ x - 15y = 0 \end{cases}$$

Sistema incompatible.

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} \frac{2x+3}{3} + \frac{y+1}{5} &= 3 \\ \frac{x-5}{2} - \frac{2y-1}{3} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} 10x + 3y = 27 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases} \begin{cases} \cdot(-3) \rightarrow -30x - 9y = -81 \\ \cdot 10 \rightarrow 30x - 40y = 130 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = -1 \rightarrow 3x - 4 \cdot (-1) = 13 \rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \quad y = -1$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} \frac{x+3}{9} - \frac{y-5}{8} &= 0 \\ \frac{2x-y+1}{2} - \frac{x+2y-3}{5} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} 8x - 9y = -69 \\ 8x - 9y = -11 \end{cases}$$

Sistema incompatible.

$$\text{e) } \left. \begin{aligned} -(2x + 3y - 2) - 6(x - y + 1) &= -15 \\ 4(x + 3) - 12(x - y + 3) &= -32 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -8x + 3y = -11 \\ -8x + 12y = -8 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow -8x + 3y = -11 \\ \cdot(-1) \rightarrow 8x - 12y = 8 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow 8x - 4 = 8 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{1}{3}$$

$$\text{f) } \left. \begin{aligned} 6(x + 2y - 3) - 5(-2x + 3y - 1) + 3 &= 6 \\ 16 &= \frac{3y}{x-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow 16x - 3y = 16$$

Sistema compatible indeterminado.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

078

••○

Dada la ecuación $2x - 5y = 14$, encuentra otra ecuación para que juntas formen un sistema de dos ecuaciones que:

- a) Tenga una sola solución. b) No tenga soluciones. c) Tenga infinitas soluciones.

Respuesta abierta.

- a) $3x - 7y = 1$ b) $2x - 5y = 0$ c) $4x - 10y = 28$

079

••○

Halla, si es posible, un valor de a para que el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 6x - 4y = 12 \\ -9x + ay = -18 \end{array} \right\}$$

- a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\frac{6}{-9} = \frac{-4}{a}$$

$$6a = 36 \rightarrow a = 6$$

- a) No es posible. b) $a = 6$ c) $a \neq 6$

080

••○

Encuentra, si es posible, un valor de b para que el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 12y = 20 \\ 4x + 9y = b \end{array} \right\}$$

- a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\frac{8}{4} \neq \frac{-12}{9} \rightarrow \text{El sistema es siempre compatible determinado.}$$

081

••○

Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.

a) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = -1 \\ -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array} \right\}$ c) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{array} \right\}$ d) $\left. \begin{array}{l} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{array} \right\}$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = -1 \\ -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y = -4 \\ -4x - y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow -1 + y = -4 \rightarrow y = -3$$

$$x = 1 \quad y = -3$$

b) $\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{array} \right\}$

Las soluciones de las dos primeras ecuaciones son $x = 3$ e $y = 4$, que no verifican la tercera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -3x - 2y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 + 2y = 0 \rightarrow y = -2$$

$$x = 1 \quad y = -2$$

$$\text{d) } \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 6x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la segunda y tercera ecuaciones son $x = \frac{10}{3}$ e $y = 6$, que no verifican la primera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

082

Determina las soluciones de estos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ -x + y - z = -2 \end{cases} \xrightarrow{x=2y-3z+6} \begin{cases} 7y - 5z = -1 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 14y - 10z = -2 \\ -5y + 10z = 20 \end{cases}$$

$$\rightarrow y = 2 \rightarrow -2 + 2z = 4 \rightarrow z = 3$$

$$x = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 6 = 1$$

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{x=-2y-z+1} \begin{cases} -5y - z = 2 \\ 5y - z = 2 \end{cases} \rightarrow z = -2 \rightarrow 5y - (-2) = 2 \rightarrow y = 0$$

$$x = -2 \cdot 0 - (-2) + 1 = 3$$

$$x = 3 \quad y = 0 \quad z = -2$$

083

Resuelve las inecuaciones.

$$\text{a) } -x + 15 \leq 3 - 7x$$

$$\text{c) } -x - 13 \leq 3 + 7x$$

$$\text{b) } x + 11 \geq 3 - 4x$$

$$\text{d) } 2x + 11 \geq 6 + 5x$$

$$\text{a) } -x + 15 \leq 3 - 7x \rightarrow 6x \leq -12 \rightarrow x \leq 2$$

$$(-\infty, 2]$$

$$\text{b) } x + 11 \geq 3 - 4x \rightarrow 5x \geq -8 \rightarrow x \geq -\frac{8}{5}$$

$$\left[-\frac{8}{5}, +\infty\right)$$

$$\text{c) } -x - 13 \leq 3 + 7x \rightarrow -16 \leq 8x \rightarrow -2 \leq x$$

$$[-2, +\infty)$$

$$\text{d) } 2x + 11 \geq 6 + 5x \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow \frac{5}{3} \geq x$$

$$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

084 ●○○ Halla la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$

b) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$

c) $\frac{x + 2}{3} - \frac{2x + 4}{2} > 1$

a) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9 \rightarrow x - 2x - 4 - 6 + 12x \leq 9$

$$\rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \frac{19}{11}$$

$$\left(-\infty, \frac{19}{11}\right]$$

b) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x) \rightarrow -14x \geq -42 \rightarrow x \leq \frac{42}{14} = 3$

$$(-\infty, 3]$$

c) $\frac{x + 2}{3} - \frac{2x + 4}{2} > 1 \rightarrow 2x + 4 - 6x - 12 > 6 \rightarrow -4x > 14 \rightarrow x < -\frac{7}{2}$

$$\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$$

085 ●○○ Encuentra la solución de las inecuaciones.

a) $\frac{1 - 5x}{4} - 2\frac{4 + 3x}{5} \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{-2 + 3x}{5} + \frac{6 - 4x}{3} + \frac{1}{2} \geq 0$

c) $1 - \frac{2x - 5}{6} + \frac{1 - 4x}{2} - \frac{x - 1}{3} < 0$

a) $\frac{1 - 5x}{4} - 2\frac{4 + 3x}{5} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 5 - 25x - 32 - 24x \leq 10$

$$\rightarrow -49x \leq 37 \rightarrow x \geq -\frac{37}{49}$$

$$\left[-\frac{37}{49}, +\infty\right)$$

b) $\frac{-2 + 3x}{5} + \frac{6 - 4x}{3} + \frac{1}{2} \geq 0 \rightarrow -12 + 18x + 60 - 40x + 15 \geq 0$

$$\rightarrow -22x \geq -63 \rightarrow x \leq \frac{63}{22}$$

$$\left(-\infty, \frac{63}{22}\right]$$

c) $1 - \frac{2x - 5}{6} + \frac{1 - 4x}{2} - \frac{x - 1}{3} < 0 \rightarrow 6 - 2x + 5 + 3 - 12x - 2x + 2 < 0$

$$\rightarrow -16x < -16 \rightarrow x > 1$$

$$(1, +\infty)$$

086

Resuelve estas inecuaciones.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2(x-5) - 3(2-2x) < 0 \\ -x + 3(2+x) > 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 4(2x-5) + 2(8-2x) + 7 \geq 0 \\ 3(1-2x) - 3(2x-1) + 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-2}{5} + \frac{1-x}{3} < 0 \\ \frac{2-3x}{6} - \frac{3-3x}{2} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} -3(x+1) \cdot 2 - \frac{2+5x}{3} > 1 \\ 2 \cdot \frac{2x-1}{5} + \frac{1}{5} < 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2(x-5) - 3(2-2x) < 0 \\ -x + 3(2+x) > 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 8x < 16 \\ 2x > -3 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x < 2 \\ x > -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 2 \right)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 4(2x-5) + 2(8-2x) + 7 \geq 0 \\ 3(1-2x) - 3(2x-1) + 1 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3 \geq 0 \\ -12x + 7 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x > -\frac{3}{4} \\ x \leq \frac{7}{12} \end{array} \right\} \rightarrow \left[-\frac{3}{4}, \frac{7}{12} \right]$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \frac{x-2}{5} + \frac{1-x}{3} < 0 \\ \frac{2-3x}{6} - \frac{3-3x}{2} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - 1 < 0 \\ 6x - 7 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{7}{6} \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{7}{6}, +\infty \right)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} -3(x+1) \cdot 2 - \frac{2+5x}{3} > 1 \\ 2 \cdot \frac{2x-1}{5} + \frac{1}{5} < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -23x - 20 > 3 \\ 4x - 2 + 1 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x < -1 \\ x < \frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow (-\infty, -1)$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

087

•••

¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?

- a) $x^2 - x - 6 < 0$ c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$ e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
 b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$ d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$ f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \frac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$$f) \text{ Resolvemos la ecuación: } 6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{2} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -1 \quad x = 0$$

Si $x = -10 \rightarrow 6(-10)^2 + 31 \cdot (-10) + 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow \left(-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{2}{3}\right]$.

088

Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

$$a) \frac{x+3}{x-5} < 0$$

$$c) \frac{-x+1}{2-3x} > 0$$

$$b) \frac{2x-3}{x+3} < 0$$

$$d) \frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$$

$$a) \frac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$(-3, 5)$$

$$b) \frac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$$

$$c) \frac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \begin{cases} -x+1 < 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$d) \frac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \frac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

089 Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0$

b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0$

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5$

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0$

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x$

a) $\frac{x+2}{3} + \frac{x(x-1)}{5} > 0 \rightarrow 5x + 10 + 3x^2 - 3x > 0 \rightarrow 3x^2 + 2x + 10 > 0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-x^2}{3} + 1 < 0 \rightarrow 9x - 3 - 2x + 2x^2 + 6 < 0 \rightarrow 2x^2 + 7x + 3 < 0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -1 \quad x = 0$$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 7 \cdot (-10) + 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 < 0 \rightarrow \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 3 > 0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5 \rightarrow 12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \rightarrow -6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$-6x^2 + 20x - 67 = 0$$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

$$\begin{aligned} \text{d) } 3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} &\geq 0 \rightarrow 18 - 6x + 9 + 32x + 2x^2 \geq 0 \\ &\rightarrow 2x^2 + 26x + 27 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2 + 26x + 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-13 - \sqrt{115}}{2} \\ x_2 = \frac{-13 + \sqrt{115}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -5 \quad x = 0$$

$$\text{Si } x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 26 \cdot (-10) + 27 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-13 - \sqrt{115}}{2}\right)$$

es solución de la inecuación.

$$\text{Si } x = -5 \rightarrow 2 \cdot (-5)^2 + 26 \cdot (-5) + 27 < 0 \rightarrow \left(\frac{-13 - \sqrt{115}}{2}, \frac{-13 + \sqrt{115}}{2}\right)$$

no es solución de la inecuación.

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 26 \cdot 0 + 27 > 0 \rightarrow \left(\frac{-13 + \sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$$

es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

$$\text{Por tanto, la solución es } \left(-\infty, \frac{-13 - \sqrt{115}}{2}\right] \cup \left[\frac{-13 + \sqrt{115}}{2}, +\infty\right).$$

$$\text{e) } \frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x \rightarrow 4x^2 + 33x + 7 \geq 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2 + 33x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-33 - \sqrt{977}}{8} \\ x_2 = \frac{-33 + \sqrt{977}}{8} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -5 \quad x = 0$$

$$\text{Si } x = -10 \rightarrow 4 \cdot (-10)^2 + 33 \cdot (-10) + 7 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-33 - \sqrt{977}}{8}\right)$$

es solución de la inecuación.

$$\text{Si } x = -5 \rightarrow 4 \cdot (-5)^2 + 33 \cdot (-5) + 7 < 0 \rightarrow \left(\frac{-33 - \sqrt{977}}{8}, \frac{-33 + \sqrt{977}}{8}\right)$$

no es solución de la inecuación.

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 + 33 \cdot 0 + 7 > 0 \rightarrow \left(\frac{-33 + \sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$$

es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

$$\text{Por tanto, la solución es } \left(-\infty, \frac{-33 - \sqrt{977}}{8}\right] \cup \left[\frac{-33 + \sqrt{977}}{8}, +\infty\right).$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

090

•••

Obtén las soluciones de estos sistemas.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array} \right\}$$

Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 3 \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-1, 4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 3 \cdot 10 - 4 > 0 \rightarrow (4, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

$$2x - 3 < 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -1)$.

b) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

c) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $(4, +\infty)$.

d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

091

•••

Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 3x + 5 > -16 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ 3x - 2 < 10 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 2x - 3 > 13 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} x^2 + 4x - 5 < 0 \\ 3x - 2 > 10 \end{array} \right\}$$

a) Resolvemos cada una de las inecuaciones.

$$-x^2 - 3x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 10 < 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 10 > 0 \rightarrow (-5, 2)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 10 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

$$3x + 5 > -16 \rightarrow x > -7$$

Por tanto, la solución es $(-7, +\infty)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-7, -5) \cup (2, +\infty)$.

b) La inecuación de segundo grado es la misma que en el apartado anterior.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$:

$$2x - 3 > 13 \rightarrow x > 8$$

Por tanto, la solución es $(8, +\infty)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(8, +\infty)$.

c) Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 4 \cdot (-10) - 5 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 < 0 \rightarrow (-5, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 4 \cdot 10 - 5 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$3x - 2 < 10 \rightarrow x < 4$$

Por tanto, la solución es $(-\infty, 4)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -5) \cup (1, 4)$.

d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, vemos que el sistema no tiene solución.

092
●○○

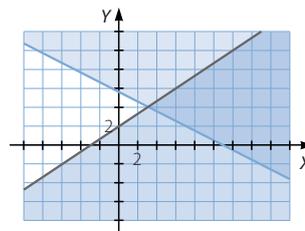
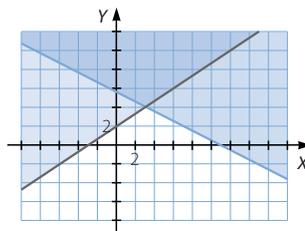
Obtén gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 < 0 \\ x + 2y > 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y > 11 \end{cases}$

a) La solución es la región más oscura.

b) La solución es la región más oscura.



Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

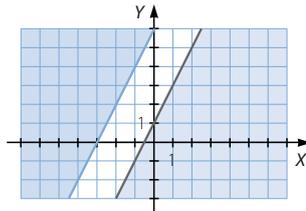
093

•••

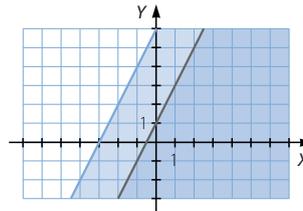
Calcula las soluciones de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$

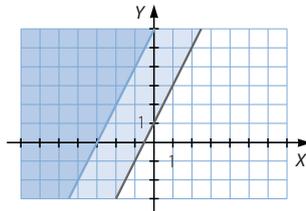
a) No tiene solución.



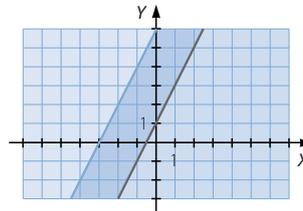
c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



d) La solución es la región más oscura.



094

•••

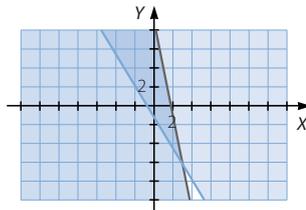
Resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} < \frac{y+6}{5} \\ \frac{4-x}{3} + \frac{2-y}{5} < 2 \end{cases}$

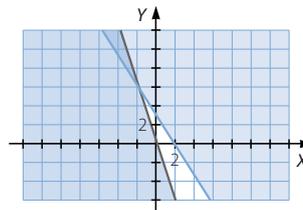
c) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{6x+y}{25} < \frac{3-y}{5} \\ \frac{-x+1}{3} - 2 \cdot \frac{2x+y-3}{2} < \frac{3x+1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

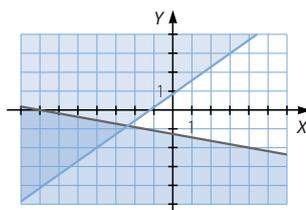
a) La solución es la región más oscura.



c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



095

Determina la suma y el producto de las soluciones de la ecuación.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Halla las soluciones. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 14 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

096

Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \frac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

\rightarrow Si $\frac{-b}{2a} = 0$ ($b = 0, c = 0$) \rightarrow Tiene una solución: $x = 0$.

\rightarrow Si $\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \text{Tiene una solución: } x = 0.$$

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \text{Tiene tres soluciones: } x = 0, x = \pm \sqrt{\frac{-b}{a}}.$$

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow \text{Tiene cuatro soluciones.}$$

$$x = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

097



Utiliza el método de sustitución para resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales.

a)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{cases}$$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2$ $x_2 = 1$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = 4$

Si $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{cases}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 2$ $x_2 = -1$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11$

Si $x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$

c) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2$ $x_2 = 5$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \frac{10}{-2} = -5$

Si $x_2 = 5 \rightarrow y_2 = \frac{10}{5} = 2$

d) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 15 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución real, por lo que el sistema no tiene solución.

098
•••

Resuelve la ecuación.

$$2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Trata de hacerlo sustituyendo en la expresión $x - \frac{1}{x} = t$ y obtendrás una ecuación de segundo grado. Calcula las soluciones para la incógnita t y luego sustituye para hallar el valor de x .

$$2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{Sustituimos: } x - \frac{1}{x} = t$$

$$\text{Resolvemos la ecuación: } 2t^2 - 3t = 0$$

$$t_1 = \frac{3}{2} \quad t_2 = 0$$

Sustituimos para calcular x :

$$x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = 2$$

$$x_3 = -1 \quad x_4 = 1$$

099
•••

Determina la solución de estas ecuaciones realizando las sustituciones de variable necesarias.

$$\text{a) } 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{x^2 - 6x + 9} - \frac{6x}{x - 3} + 8 = 0$$

$$\text{a) Sustituimos: } t = x + \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación: } 2t^2 - 9t + 10 = 0$$

$$t_1 = \frac{5}{2} \quad t_2 = 2$$

Sustituimos para calcular x :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 2$$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x_3 = 1$$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

b) Factorizamos el denominador de segundo grado:

$$\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x}{x-3} + 8 = 0$$

Lo expresamos como una identidad notable:

$$\left(\frac{x}{x-3} - 3\right)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Sustituimos: } t = \frac{x}{x-3} - 3$$

Resolvemos la ecuación: $t^2 - 1 = 0$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = 1$$

Sustituimos para calcular x :

$$1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_1 = 4$$

$$-1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_2 = 6$$

100
●●○

Si Max sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?

Llamamos x al número de escalones:

$$\frac{x}{3} + 30 = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 180 = 3x \rightarrow x = 180$$

La torre tiene 180 escalones.

101
●●○

El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?

Llamamos x al número de camellos del jeque:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} = 140 \rightarrow 3x - 2x = 420 \rightarrow x = 420$$

El rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

102
●●○

En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de crianza y 12 botellas de reserva y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva, pagó 80 €.



Llamamos x al precio de la botella de crianza e y al precio de la botella de reserva:

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 3y = 69 \\ 6x + 8y = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} 12x + 3y = 69 \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} -12x - 16y = -160 \end{array} \rightarrow -13y = -91 \rightarrow y = 7$$

$$6x + 8 \cdot 7 = 80 \rightarrow x = 4$$

El precio de la botella de crianza es de 4 € y el precio de la botella de reserva es de 7 €.

103
●●○

Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$$0,20(x - 10) = 42$$

$$x = 220$$

El comerciante compró 220 kg de melones.

104
●●○

Carmen se dispone a invertir 100.000 €.

En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4% de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6% de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

Llamamos x al dinero invertido en el Fondo Tipo A e y al dinero invertido en el Fondo B:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 100.000 \\ 0,04x + 0,06y = 4.500 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow 4.000 - 0,04y + 0,06y = 4.500$$

$$\rightarrow 0,02y = 500 \rightarrow y = 25.000$$

$$x = 100.000 - 25.000 = 75.000$$

Adquirió 75.000 € del Fondo Tipo A, y 25.000 € del Fondo Riesgo B.

105
●●○

Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a la velocidad del mismo:

$$1 \text{ h } 48 \text{ min} = 1,8 \text{ h}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,8y \\ 180 - x = 7,2y \end{array} \right\} \rightarrow 180 - 1,8y = 7,2y \rightarrow y = 20$$

$$x = 1,8 \cdot 20 = 36$$

La velocidad del ciclista es 20 km/h, y la velocidad del coche es 80 km/h.

106
●●○

Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrán recorrido hasta ese momento?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left. \begin{array}{l} x = 80y \\ x + 160 = 100y \end{array} \right\} \rightarrow 80y + 160 = 100y \rightarrow y = 8$$

$$x = 80 \cdot 8 = 640$$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

107

••○

Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.

Llamamos x al lado menor del polígono e y a su área:

$$\left. \begin{array}{l} x(x+2) = y \\ (x+2)(x+4) = y+40 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 40 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8$$

$$y = 8(8+2) = 80$$

Los lados del polígono original miden 8 y 10 m, respectivamente.

108

••○

Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 14 \\ 10y + x + 18 = 10x + y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 14 - x \\ 9y - 9x + 18 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 126 - 9x - 9x + 18 = 0 \rightarrow 18x = 144 \rightarrow x = 8$$

$$y = 14 - 8 = 6$$

El número es 86.

109

••○

El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?

Llamamos x al número de amigos de Inés, e y al dinero que tiene que pagar cada uno:

$$\left. \begin{array}{l} xy = 80 \\ (x+3)(y-6) = 80 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{80}{y} + 3 \right) (y-6) = 80 \rightarrow 80 - \frac{480}{y} + 3y - 18 = 80$$

$$\rightarrow y^2 - 6y - 160 = 0$$

$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-160)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 26}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -10 \rightarrow \text{Solución no válida} \\ y_2 = 16 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_2 = 16 \rightarrow x_2 = \frac{80}{16} = 5$$

Van de excursión 5 amigos.

110

••○

Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos de la tierra, se da cuenta que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 170 \\ x^2 + y^2 = 130^2 \end{array} \right\} \rightarrow y^2 - 170y + 6.000 = 0$$

$$y = \frac{-(-170) \pm \sqrt{(-170)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6.000}}{2 \cdot 1} = \frac{170 \pm 70}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 120 \\ y_2 = 50 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = 120 \rightarrow x_1 = 170 - 120 = 50$$

$$\text{Si } y_2 = 50 \rightarrow x_2 = 170 - 50 = 120$$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6.000 m².

111
•••

La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.

Llamamos x al lado del hexágono, y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por catetos de la apotema y la mitad del lado, y por hipotenusa, la longitud del lado:

$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 = 256 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x_1 = -\frac{16\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

La longitud del lado es $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

$$\text{El área de un polígono regular es: } A = \frac{P \cdot a_p}{2}$$

$$\text{Por tanto, el área mide: } A = 128\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

112
•••

Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2 , y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left. \begin{array}{l} (x-2)(y-5) = 360 \\ (x-4)(y-2,5) = 360 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{350+2y}{y-5} \\ x = \frac{350+4y}{y-2,5} \end{array} \right\} \rightarrow 2y^2 - 15y - 875 = 0$$

$$y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-875)}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 85}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{35}{2} \\ y_2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = -\frac{35}{2} \rightarrow x_1 = \frac{350 + 2 \cdot \frac{-35}{2}}{\frac{-35}{2} - 5} = -14 \quad \text{Si } y_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{350 + 2 \cdot 25}{25 - 5} = 20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

113
•••

Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Llamamos x al número:

$$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -22 & -8 \\ 4 & & 4 & 24 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{7} \\ x_2 = -3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$$x_1 = -3 - \sqrt{7} \quad x_2 = -3 + \sqrt{7} \quad x_3 = 4$$

El número entero es 4.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

114



Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Llamamos x a la arista del cubo:

$$(x + 4)^3 = 8x^3 \rightarrow -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -7 & 12 & 48 & 64 \\ & & -28 & -64 & -64 \\ \hline & -7 & -16 & -16 & 0 \end{array}$$

$$x = 4$$

$$-7x^2 - 16x - 16 = 0 \rightarrow 7x^2 + 16x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 7 \cdot 16}}{2 \cdot 7} = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

La longitud de la arista es de 4 cm.

115



Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

Llamamos x al precio de las vacas, y al precio de los terneros y z al precio de las ovejas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 16z \\ x + 4z = 3y \\ 3y + 8z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4z \\ y = \frac{8}{3}z \end{array} \right\}$$

Una vaca vale lo mismo que cuatro ovejas, y un ternero cuesta igual que ocho terceras partes del precio de una oveja.

116



Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma abc . Determinalo, sabiendo que si escribes cab , el número disminuye 459 unidades; si escribes bac , el número disminuye 360 unidades, y que bca es 45 unidades menor que bac .

A la cifra de las centenas la llamamos a , a la de las decenas b y a la de las unidades c :

$$\left. \begin{array}{l} 100a + 10b + c = 100c + 10a + b + 459 \\ 100a + 10b + c = 100b + 10a + c + 360 \\ 100b + 10c + a = 100b + 10a + c - 45 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 90a + 9b - 99c = 459 \\ 90a - 90b = 360 \\ -9a + 9c = -45 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 10a + b - 11c = 51 \\ 10a - 10b = 40 \\ -a + c = -5 \end{array} \right\} \xrightarrow{a=c+5} \left. \begin{array}{l} b - c = 1 \\ -10b + 10c = -10 \end{array} \right\}$$

$$a = c + 5 \text{ y } b = c + 1$$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, c es un número de 0 a 9. Como $a = c + 5$, c solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4. Para cada uno de estos valores de c resultan a y b .

Si $c = 0$, entonces: $a = 5$ y $b = 1$. El número es 510.

Si $c = 1$, entonces: $a = 6$ y $b = 2$. El número es 621.

Si $c = 2$, entonces: $a = 7$ y $b = 3$. El número es 732.

Si $c = 3$, entonces: $a = 8$ y $b = 4$. El número es 843.

Si $c = 4$, entonces: $a = 9$ y $b = 5$. El número es 954.

117
●●○

El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3.
¿Qué números cumplen esta propiedad?

Llamamos x al número:

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty \right)$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$.

118
●●○

De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

Llamamos x al número: $x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$

$$\text{Resolvemos la ecuación: } 2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 1 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 0 - 1 < 0 \rightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 1 > 0 \rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, +\infty \right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\frac{1 - \sqrt{17}}{4}$ y menores que $\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$.

119
●●○

¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva?
¿Qué números cumplen esa condición?

Llamamos x al número:

$$\text{Vemos que no se verifica que: } -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$x + x^2 > 0$$

$$\text{Resolvemos la ecuación: } x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = -0,5 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -0,5 \rightarrow (-0,5)^2 - 0,5 < 0 \rightarrow (-1, 0)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 > 0 \rightarrow (0, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

120



Encuentra todos los números enteros que multiplicados por el siguiente número den un resultado menor que 24.

Llamamos x al número:

$$x(x + 1) < 24 \rightarrow x^2 + x - 24 < 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 + x - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{97}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{97}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 0 - 24 < 0 \rightarrow \left(\frac{-1 - \sqrt{97}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{97}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(\frac{-1 - \sqrt{97}}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\frac{-1 - \sqrt{97}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{97}}{2}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\frac{-1 - \sqrt{97}}{2}$ y menores que $\frac{-1 + \sqrt{97}}{2}$.

121



Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5 - 3x}$

b) $\sqrt{x - 3}$

c) $\sqrt{4 - 3x - x^2}$

d) $\log(2 - 5x)$

e) $\log(6 - x - x^2)$

f) $\log(x^2 - 2x + 1)$

a) $5 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{5}{3}$

$$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$$

b) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$$[3, +\infty)$$

c) $4 - 3x - x^2 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 4 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 4 > 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 4 < 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-4, 1]$.

d) $2 - 5x > 0 \rightarrow x < \frac{2}{5}$

$$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$$

e) $6 - x - x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \quad x = 0 \quad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - (-10) + 6 < 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 0 + 6 > 0 \rightarrow (-3, 2)$ es solución de la inecuación.Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 10 + 6 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 2)$.

f) $x^2 - 2x + 1 > 0$

La ecuación solo se anula para $x = 1$, y en el resto de los valores el primer miembro de la inecuación es siempre positivo.

$$x \neq 1$$

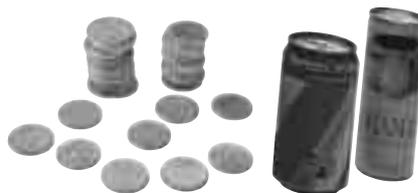
122

Jesús y Beatriz quieren saber cuánto cuesta un bote de refresco, pero no recuerdan exactamente lo que pagaron. Jesús compró 8 botes y sabe que pagó con un billete de 5 € y que le devolvieron una moneda de 2 € y algo más de dinero. Beatriz compró 18 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?

Llamamos x al precio del bote de refresco:

$$5 - 8x > 2 \quad \left. \begin{array}{l} x < \frac{3}{8} \\ 18x < 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{3}{8} \\ x < \frac{7}{18} \end{array} \right\}$$

El precio del bote de refresco es menor que 0,375 €.



Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

PARA FINALIZAR...

123 Demuestra la siguiente propiedad que cumplen los números combinatorios.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n}1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

124 Demuestra, utilizando el método de inducción, las siguientes igualdades.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

a) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Suponemos cierta la igualdad para $n = k$ y la demostramos para $n = k + 1$:

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

La igualdad es cierta.

b) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n = 1$: $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$

Suponemos cierta la igualdad para $n = k$ y la demostramos para $n = k + 1$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

La igualdad es cierta.

c) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n = 1$: $\left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 = 1$

Suponemos cierta la igualdad para $n = k$ y la demostramos para $n = k + 1$:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

La igualdad es cierta.

125 Discute las soluciones de la siguiente ecuación, según los valores de m .

$$x^2 - 2x + \log m = 0$$

Por la definición de logaritmo, $m > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4 - 4 \log m < 0 \rightarrow (10, +\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4 - 4 \log m = 0 \rightarrow m = 10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4 - 4 \log m > 0 \rightarrow (-\infty, 10)$

126 Si las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2 , escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) Los cuadrados de x_1 y x_2 . b) Los inversos de x_1 y x_2 . c) Los opuestos de x_1 y x_2 .

$$a) (x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$$

$$b) \left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$$

$$c) (x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

127 Halla la relación entre los coeficientes de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

Dividiendo la ecuación de tercer grado entre el coeficiente del monomio de mayor grado, y comparando los coeficientes, se obtiene que:

El coeficiente de segundo grado es el opuesto a la suma de las tres raíces.

El coeficiente de primer grado es la suma del resultado de multiplicar las raíces dos a dos.

El término independiente es el opuesto del producto de las tres raíces.

128 Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño. Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con esos datos, calcula los peldaños «visibles» de la escalera.

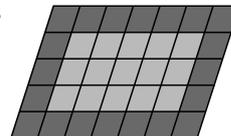
Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras que Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

$$\text{Por tanto, resulta que: } 75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

El número de peldaños «visibles» es 100.

129 Tenemos un suelo rectangular, formado por baldosas enteras cuadradas de color claro, que está rodeado de baldosas oscuras, también cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo claro para que el número de baldosas de la zona clara sea igual al de la franja oscura que lo rodea?



Sean x e y el número de baldosas claras que hay en el largo y el ancho.

$$(x + 2)(y + 2) = 2xy \rightarrow \text{Esta ecuación tiene infinitas soluciones.}$$

Una solución de esta ecuación es: $x = 10$ e $y = 3$

Es decir, el rectángulo claro tendrá 10 baldosas de largo y 3 baldosas de ancho.