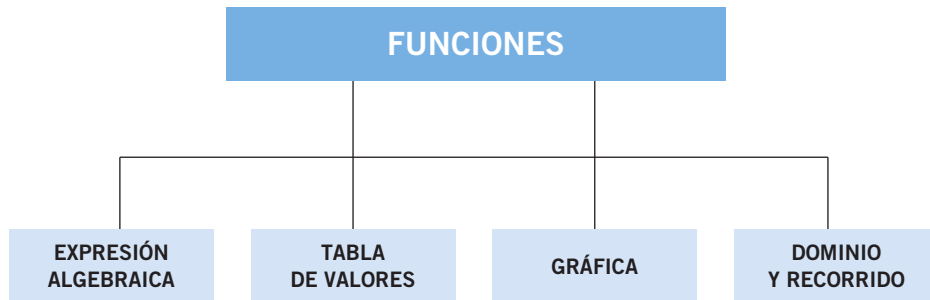
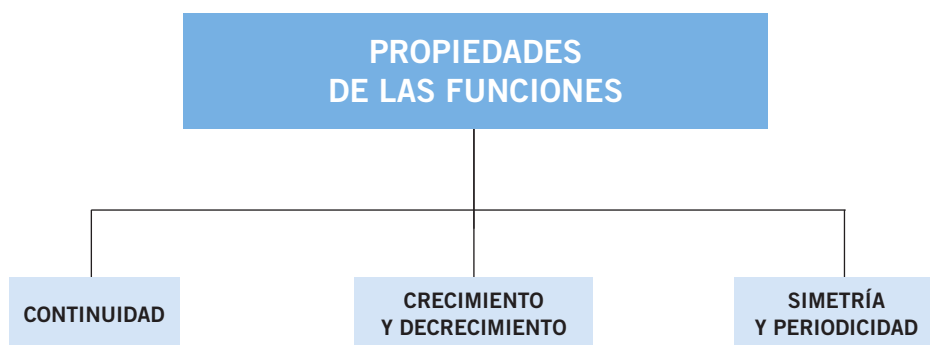


# 9

# Funciones



## FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS



## Alimento de parásitos

Otra vez se producía la misma situación, cada vez que cambiaban el destacamento encargado de vigilar el Centro de Investigación ocurría lo mismo: los nuevos soldados con su brillante uniforme del ejército nazi los insultaban, los humillaban y, si se atrevían a protestar, llegaban incluso al castigo físico.

Stefan Banach y su compañero Piotr agacharon la cabeza, y como si los comentarios no fueran con ellos, atravesaron la entrada disponiéndose a comenzar su trabajo.

Abrieron las cajas y, con meticulosa precisión, empezaron a alimentar a los diminutos parásitos.

Al verlo, los guardias se reían a la vez que hacían comentarios claramente ofensivos hacia los dos operarios.

—¿Qué es eso, Hans? —preguntó un soldado.

El otro contestó entre risotadas:

—¡Dos cucarachas alimentando a los piojos!

Piotr miró a Banach, intentando transmitirle su enfado.

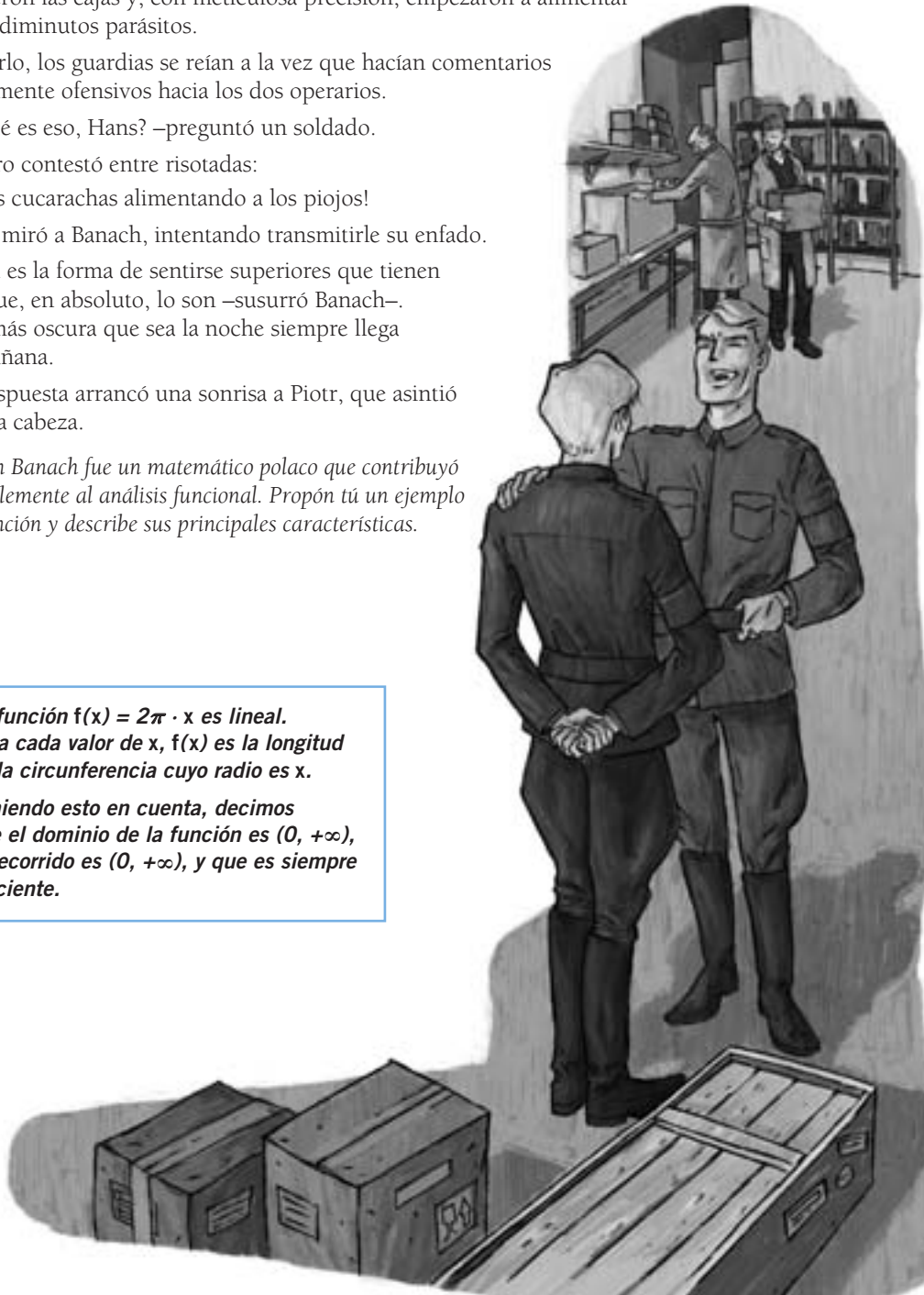
—Esta es la forma de sentirse superiores que tienen los que, en absoluto, lo son —susurró Banach—.

Por más oscura que sea la noche siempre llega la mañana.

La respuesta arrancó una sonrisa a Piotr, que asintió con la cabeza.

*Stefan Banach fue un matemático polaco que contribuyó notablemente al análisis funcional. Propón tú un ejemplo de función y describe sus principales características.*

**La función  $f(x) = 2\pi \cdot x$  es lineal. Para cada valor de  $x$ ,  $f(x)$  es la longitud de la circunferencia cuyo radio es  $x$ . Teniendo esto en cuenta, decimos que el dominio de la función es  $(0, +\infty)$ , el recorrido es  $(0, +\infty)$ , y que es siempre creciente.**



# Funciones

## EJERCICIOS

- 001** Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla de valores, la función que asigna a cada número su cubo menos dos veces su cuadrado.

Expresión algebraica:  $y = x^3 - 2x^2$  o  $f(x) = x^3 - 2x^2$

Tabla de valores:

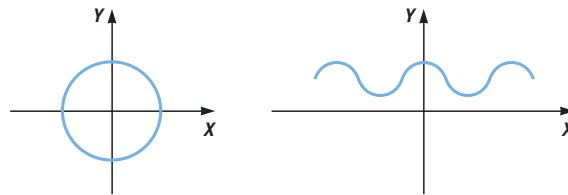
$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	-3	0	-1	0

- 002** Expresa, mediante un enunciado y una tabla de valores, la función  $y = 2x - 1$ .

En el aula hay el doble de chicas menos uno que de chicos.

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	5	7	9

- 003** Averigua si estas gráficas representan a una función.



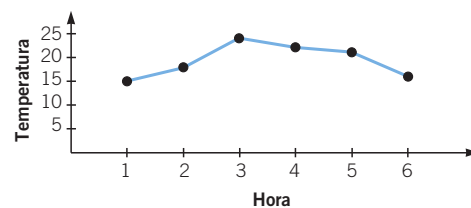
La primera gráfica no es una función, porque a cada valor de la variable  $x$  le corresponden dos valores de la variable  $y$ .

La segunda gráfica es una función, pues a cada valor de la variable  $x$  le corresponde un único valor de la variable  $y$ .

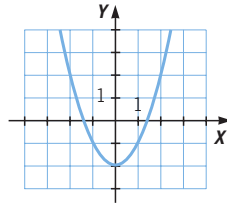
- 004** Se ha medido la temperatura de una sala durante 6 horas y se ha construido una tabla con los resultados. Realiza una gráfica asociada a dicha tabla.

Hora	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	15	18	24	22	21	16

¿Se pueden unir los puntos?



**005** Elabora una tabla de valores que se corresponda con la siguiente gráfica.

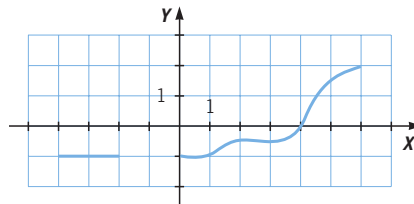


$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	2	-1	-2	-1	2

**006** Pon un ejemplo de función en cuya gráfica no se puedan unir los puntos.

Cualquier función discreta; por ejemplo, el precio de la compra, dependiendo de la cantidad de artículos que adquiramos.

**007** A partir de la gráfica de esta función, determina su dominio y su recorrido.



$$\text{Dom } f = [-4, -2] \cup [0, 6]; \text{Im } f = [-1, 2]$$

**008** Halla el dominio y el recorrido de esta función.

$$f(x) = \frac{5}{x-1}$$

El dominio está formado por todos los valores de  $x$  menos  $x = 1$ .

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

El recorrido está formado por todos los valores de  $y$  menos  $y = 0$ , pues no hay ningún número,  $a$ , tal que  $0 = \frac{5}{a-1}$ .

$$\text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

**009** ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función que a cada valor de  $x$  le hace corresponder su raíz cuadrada positiva?

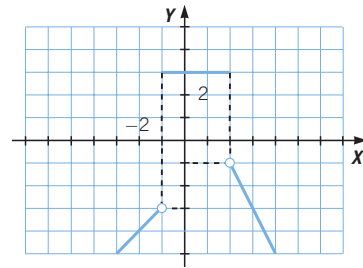
El dominio está formado por todos los valores positivos de  $x$ :  $\mathbb{R}^+$ .

El recorrido está formado por todos los valores positivos de  $y$ :  $\mathbb{R}^+$ .

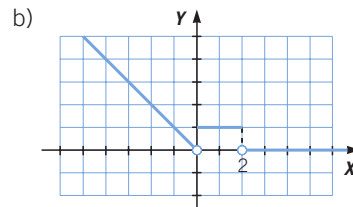
# Funciones

**010** Representa estas funciones definidas a trozos.

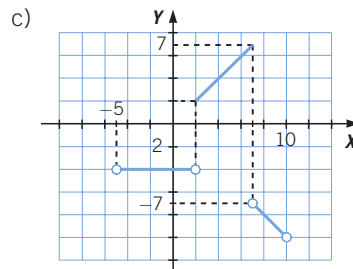
a)  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 - 2x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$



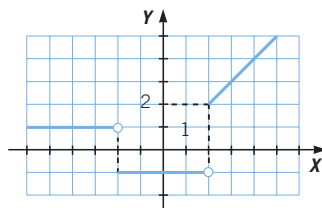
b)  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$



c)  $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } -5 < x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \\ -x & \text{si } 7 < x < 10 \end{cases}$



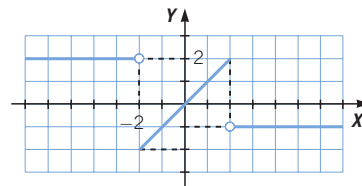
**011** Determina la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica.



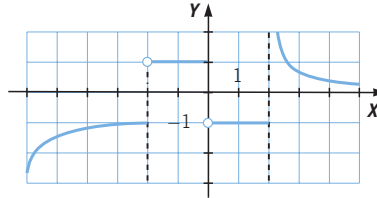
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$

**012** Escribe la expresión de una función definida a trozos y represéntala.

$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$



**013** Estudia la continuidad de esta función. ¿Tiene puntos de corte con los ejes?

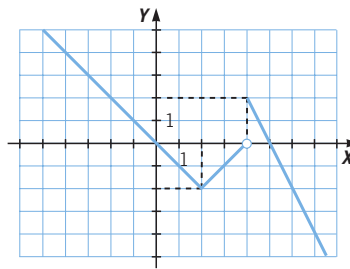


La función es continua en todos los puntos menos en  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 2$ .  
 En  $x = -2$ , la función tiene un salto, y vale  $-1$  a la izquierda y  $1$  a la derecha.  
 En  $x = 0$ , la función tiene otro salto, y vale  $1$  a la izquierda y  $-1$  a la derecha.  
 En  $x = 2$ , la función no está definida a la derecha.  
 El único punto de corte con los ejes es  $(0, 2)$ .

**014** Representa  $f(x)$  y estudia su continuidad.

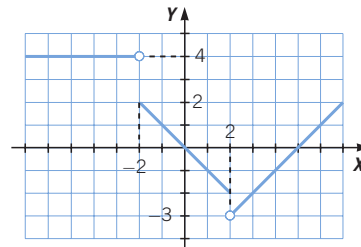
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x \leq 2 \\ x - 4 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 10 - 2x & \text{si } 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

La función es continua en todos los puntos menos en  $x = 4$ , donde tiene un salto.

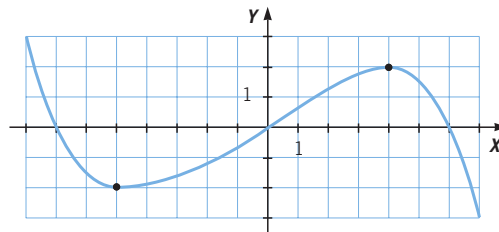


**015** Inventa una función que tenga dos puntos de discontinuidad y que corte dos veces al eje  $X$ .

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } -\infty < x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$



**016** Estudia el crecimiento de la función y la existencia de máximos y mínimos.



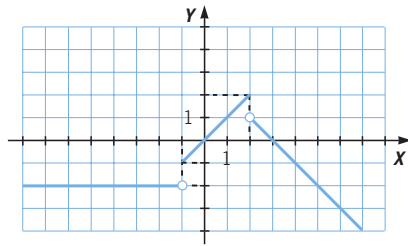
La función es decreciente en el intervalo  $(-\infty, -5)$ , es creciente en  $(-5, 4)$  y es decreciente en  $(4, +\infty)$ .

La función presenta un mínimo en  $x = -5$  y un máximo en  $x = 4$ .

## Funciones

**017** Estudia la continuidad, el crecimiento y los máximos y mínimos de la función.

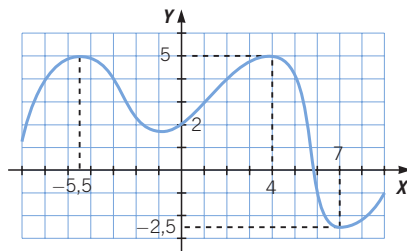
$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\infty < x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 < x < +\infty \end{cases}$$



La función es continua en todos los puntos menos en  $x = -1$  y  $x = 2$ .

La función es constante en el intervalo  $(-\infty, -1)$ , es creciente en  $(-1, 2)$  y es decreciente en  $(2, +\infty)$ . Presenta un máximo absoluto en  $x = 2$ .

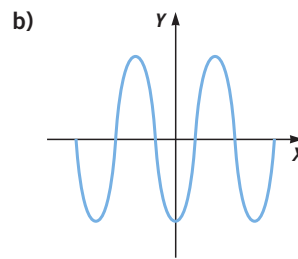
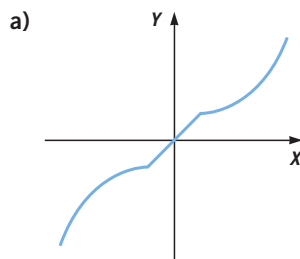
**018** Dibuja una función que tenga dos máximos y dos mínimos.



Máximos:  $(-5,5; 5)$  y  $(4; 5)$

Mínimos:  $(-1; 1,8)$  y  $(7; -2,5)$

**019** Estudia la simetría de las siguientes funciones.



a) Esta función es simétrica respecto del origen, pues la parte del semieje negativo se puede obtener girando  $180^\circ$ , respecto del origen, la parte correspondiente del semieje positivo.

b) Esta función es simétrica respecto del eje de ordenadas porque, si doblamos por el eje  $Y$ , las dos ramas de la función coinciden.

**020** Determina algebraicamente si estas funciones presentan algún tipo de simetría.

a)  $f(x) = x^5 + x$       c)  $h(x) = \frac{2}{x^5}$       e)  $j(x) = \sqrt{x^3}$   
 b)  $g(x) = x^3 - x^2$       d)  $i(x) = 5$       f)  $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a)  $f(x) = x^5 + x$

$$f(-x) = (-x)^5 - x = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$$

Como  $f(-x) = -f(x)$ , es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

b)  $g(x) = x^3 - x^2$

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2$$

Como  $g(-x) \neq g(x)$  y  $g(-x) \neq -g(x)$ , la función no es simétrica.

c)  $h(x) = \frac{2}{x^5}$        $h(-x) = \frac{2}{(-x)^5} = \frac{2}{-x^5} = -h(x)$

Como  $h(-x) = -h(x)$ , es una función impar y simétrica respecto del origen de coordenadas.

d)  $i(x) = 5$        $i(-x) = 5 = i(x)$

Como  $i(-x) = i(x)$ , la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

e)  $j(x) = \sqrt{x^3}$        $j(-x) = \sqrt{(-x)^3} = \sqrt{-x^3}$

Como  $j(-x) \neq j(x)$  y  $j(-x) \neq -j(x)$ , la función no es simétrica.

f)  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$        $g(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = g(x)$

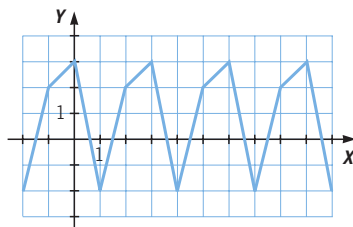
Como  $g(-x) = g(x)$ , la función es par y simétrica respecto del eje de ordenadas.

**021** ¿Puede ser una función simétrica respecto del eje  $Y$  y, a la vez, respecto del origen?

Si la función es par,  $f(x) = f(-x)$ . Y si la función es impar,  $-f(x) = f(-x)$ .

Por tanto, si la función es par e impar,  $f(x) = f(-x) = -f(x)$ . La única opción es  $f(x) = 0$ , que corresponde a la función constante 0.

**022** Determina si la función es periódica y calcula su período.



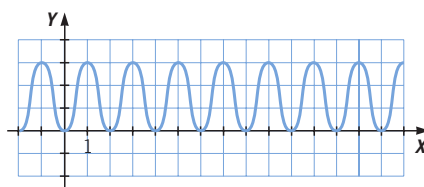
La función es periódica, de período 3.



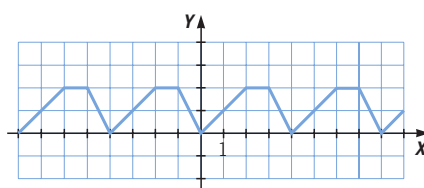
## Funciones

**023** Dibuja una función de período 2 y otra función de período 4.

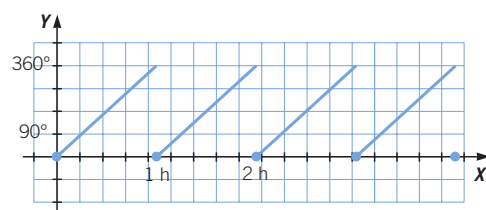
Con período 2:



Con período 4:



**024** Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj. ¿Es una función periódica?



Es una función periódica, con período de  $1,09$  h.

### ACTIVIDADES

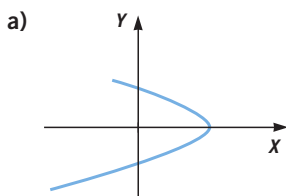
**025** Para cada una de las funciones, calcula la imagen de 2, -2, 3, -3, 1 y -1.

- a)  $f(x) = 5x^2 - 1$
  - b)  $f(x) = 2x^2 - x$
  - c)  $f(x) = x^2 - x - 1$
  - d)  $f(x) = -x^2 + 1$
- a)  $f(2) = 19$ ;  $f(-2) = 19$ ;  $f(3) = 44$ ;  $f(-3) = 44$ ;  $f(1) = 4$ ;  $f(-1) = 4$   
 b)  $f(2) = 6$ ;  $f(-2) = 10$ ;  $f(3) = 15$ ;  $f(-3) = 21$ ;  $f(1) = 1$ ;  $f(-1) = 3$   
 c)  $f(2) = 1$ ;  $f(-2) = 5$ ;  $f(3) = 5$ ;  $f(-3) = 11$ ;  $f(1) = -1$ ;  $f(-1) = 1$   
 d)  $f(2) = -3$ ;  $f(-2) = -3$ ;  $f(3) = -8$ ;  $f(-3) = -8$ ;  $f(1) = 0$ ;  $f(-1) = 0$

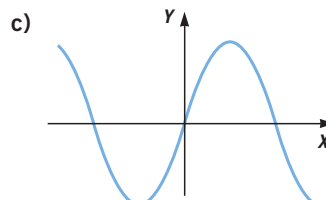
**026** Razona cuáles de las siguientes relaciones corresponden a funciones.

- a) El tamaño de una pared y la cantidad de pintura necesaria para pintarla.
- b) Cada mes del año y su número de días.
  - a) Es una función. Son variables numéricas y para cada tamaño de pared se necesita una única cantidad de pintura.
  - b) No es una función. La variable independiente,  $x$ , que corresponde a cada mes del año, no es una variable numérica; además, al mes de febrero le podrían corresponder dos valores, 28 o 29 días.

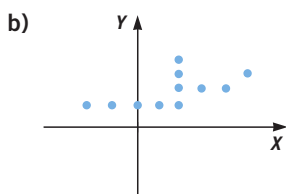
## 027 Justifica si las gráficas corresponden a una función.



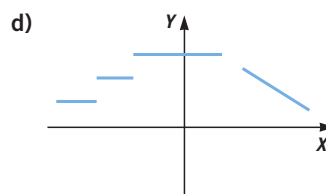
No es una función, porque a un valor de  $x$  le corresponden dos valores de  $y$ .



Es una función, pues a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .



No es una función, porque a  $x = 2$  le corresponde más de un valor de  $y$ .



Es una función, porque a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .

## 028 HAZLO ASÍ

¿QUÉ ES Y CÓMO SE CALCULA LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN?

Halla la tasa de variación media de la función  $f(x) = x^2$ , en el intervalo  $[2, 4]$ .

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo  $[a, b]$  mide el aumento o la disminución de dicha función en  $[a, b]$ .

**PRIMERO.** Se halla la variación de  $x$  y la variación de la función.

$$\text{Variación de } x: 4 - 2 = 2 \quad \text{Variación de } f(x): f(4) - f(2) = 16 - 4 = 12$$

**SEGUNDO.** Se calcula el cociente que resulta al dividir la variación de  $f(x)$  entre la variación de  $x$ .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

Este cociente es la tasa de variación media de  $f(x)$  en el intervalo  $[2, 4]$ .

029 Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones, en el intervalo  $[1, 3]$ .

a)  $f(x) = x^3$

b)  $f(x) = x - 2$

a)  $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4 \rightarrow$  La tasa de variación media es 4.

b)  $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \rightarrow$  La tasa de variación media es 1.

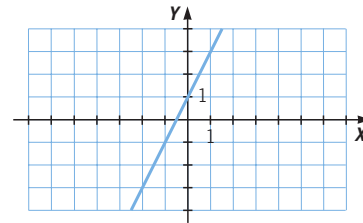
# Funciones

**030** Completa la tabla de valores correspondiente a la función  $f(x) = x^2 - 3$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

**031** Dada la función  $f(x) = 2x + 1$ , haz una tabla con seis valores y dibuja su gráfica.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7



**032** Elabora una tabla de valores para estas funciones.

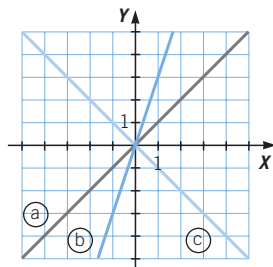
a)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$

b)  $f(x) = \frac{7x}{x^2+3}$

a)	$x$	-2	-1	0	1	2
	$f(x)$	1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{3} = 0,33$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,2$

b)	$x$	-2	-1	0	1	2
	$f(x)$	-2	$-\frac{7}{4} = -1,75$	0	$\frac{7}{4} = 1,75$	$\frac{14}{5} = 2$

**033** Realiza una tabla de valores y encuentra la expresión algebraica correspondiente a estas funciones.



a)  $f(x) = x$

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	1	2

b)  $f(x) = 3x$

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-6	-3	0	3	6

c)  $f(x) = -x$

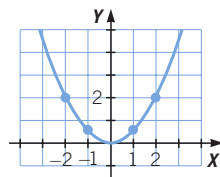
$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	-1	-2

**034** Representa la función que relaciona el área de un triángulo rectángulo isósceles y la longitud del cateto.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la variable independiente?

$$y = \frac{x^2}{2}$$



a) La variable independiente es la longitud del cateto.

b) La variable dependiente es el área del triángulo.

**035** Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más cinco unidades:

- a) Halla su expresión algebraica.  
 b) Calcula los valores de la función para  $x = 2$  y  $x = 0$ .  
 c) ¿Existe valor de la función en  $x = \frac{2}{3}$ ?

a)  $y = \frac{x}{4} + 5$

b)  $f(2) = 5,5$ ;  $f(0) = 5$

c) No, ya que la función solo está definida para los números enteros.

**036** Señala si la relación que asocia a cada número su raíz cuadrada positiva es una función.

- a) ¿Cuál el valor de la variable dependiente para los valores 0, 1, 2 y 3 de  $x$ ?  
 b) ¿Qué ocurre con los valores negativos de la variable independiente?  
 c) Halla el dominio y el recorrido de la función.

Es una función, ya que cada número solo tiene una única raíz positiva.

a)  $f(0) = 0$ ;  $f(1) = 1$ ;  $f(2) = +\sqrt{2}$ ;  $f(3) = +\sqrt{3}$

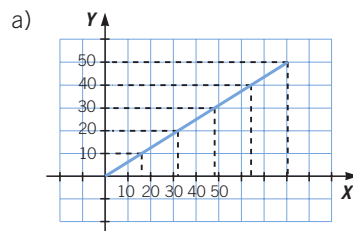
b) Cuando la variable es negativa, la función no está definida.

c) Dominio:  $\mathbb{R}^+$ , recorrido:  $\mathbb{R}^+$ .

**037** Esta tabla muestra la conversión de la velocidad medida en kilómetros por hora a millas por hora.

Velocidad (km/h)	16,1	32,2	48,3	64,4	80,5	...
Velocidad (millas/h)	10	20	30	40	50	...

- a) Representala gráficamente.  
 b) Escribe la expresión algebraica que relaciona la velocidad en kilómetros por hora y en millas por hora.



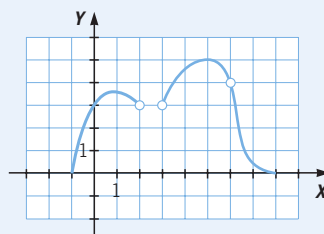
b)  $y = \frac{x}{1,61}$

## Funciones

### 038 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA?

Calcula el dominio y el recorrido de esta función.



#### 1. DOMINIO

**PRIMERO.** Observando el eje  $X$ , se establece el primer y el último valor de  $x$  para el que está definida la función.

En este caso, el primer valor es  $x = -1$  y el último valor es  $x = 8$ .

**SEGUNDO.** Observando la gráfica de la función, se determinan los tramos y los puntos en los que no está definida la función.

La función no está definida en el intervalo  $[2, 3]$  y en el punto  $x = 6$ .

**TERCERO.** Se expresa el dominio con los datos obtenidos

$$\text{Dom } f = [-1, 8] - [2, 3] - \{6\}$$

#### 2. RECORRIDO

**PRIMERO.** Observando la gráfica se establece en qué valores de  $y$  la función alcanza el valor máximo y el valor mínimo.

El valor mínimo está en  $y = 0$  y el valor máximo está en  $y = 5$ .

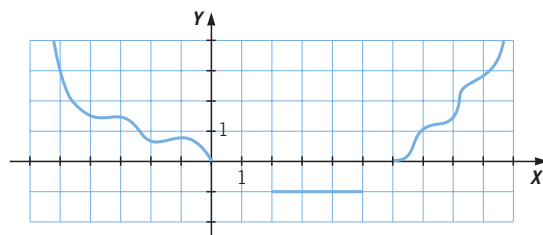
**SEGUNDO.** El recorrido de la función será el intervalo formado por esos valores.

$$\text{Im } f = [0, 5]$$

### 039 Calcula el dominio y el recorrido de estas funciones.

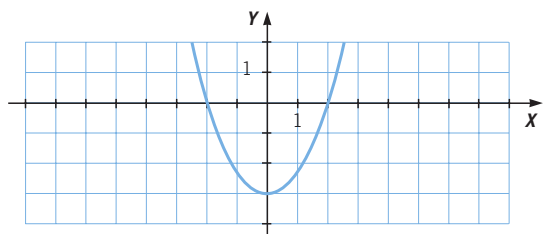


a)

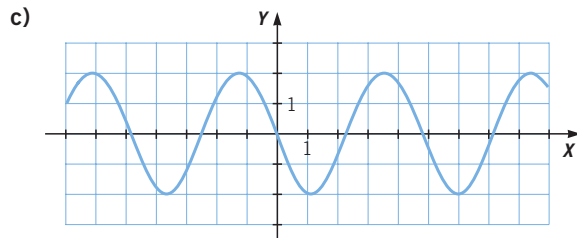


$$\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [2, 5] \cup [6, +\infty) \quad \text{Im } f = \{-1\} \cup [0, +\infty)$$

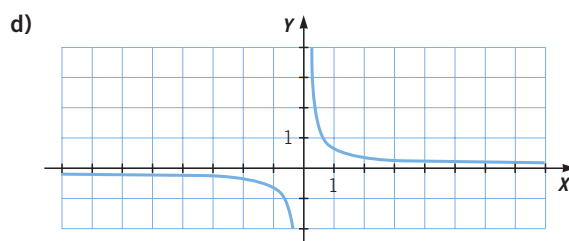
b)



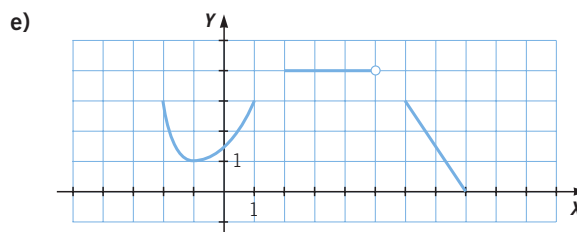
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-3, +\infty)$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = [-2, 2]$$



$$\text{Dom } (f) = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{Im } (f) = \mathbb{R} - \{0\}$$



$$\text{Dom } f = [-2, 1] \cup [2, 5] \cup [6, 8] \quad \text{Im } f = [0, 3] \cup \{5\}$$

**040** Determina el dominio y el recorrido de las funciones.

a)  $f(x) = 3x + 2$

c)  $f(x) = 5x^2$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

d)  $f(x) = \sqrt{x-1}$

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

b)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}; \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\}$

c)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}^+$

d)  $\text{Dom } f = [1, +\infty); \text{Im } f = \mathbb{R}^+$

**041** Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = 3x - 1$

b)  $g(x) = x^2 + 4x$

c)  $h(x) = \frac{2}{x-5}$

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

b)  $\text{Dom } g; \text{Im } g = [-4, +\infty)$

c)  $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{5\}; \text{Im } h = \mathbb{R} - \{0\}$

## Funciones

**042** Calcula el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2-2x}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2-2x}{x} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (3, 4)$

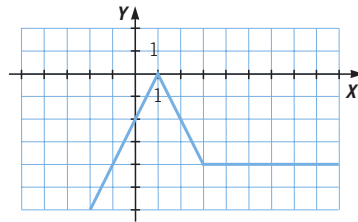
b)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

**043** Representa la función y obtén el dominio y el recorrido.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = (-\infty, 0]$

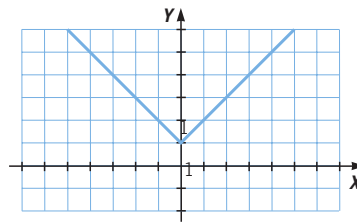


**044** Representa esta función sobre unos ejes de coordenadas, y halla su dominio y recorrido.

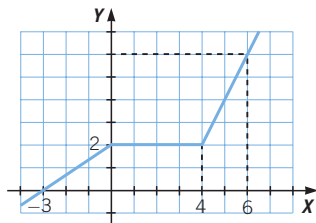
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ -x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = [1, +\infty)$



**045** Calcula la expresión algebraica de la función, y halla su dominio y recorrido.



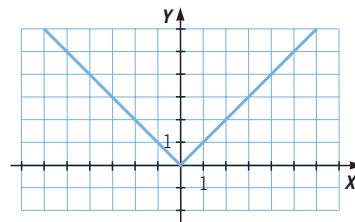
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{si } 4 < x < +\infty \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$

**046** La función que asigna a cada número su valor absoluto,  $f(x) = |x|$ , se puede expresar como una función definida a trozos de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\infty < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

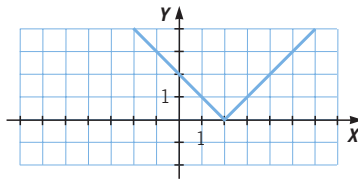
Representa gráficamente esta función.



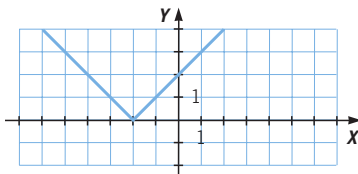
**047** Escribe, en forma de función definida a trozos, y representa estas funciones.

●● a)  $f(x) = |x - 2|$    b)  $g(x) = |x + 2|$    c)  $h(x) = |2x|$    d)  $i(x) = |-2x|$

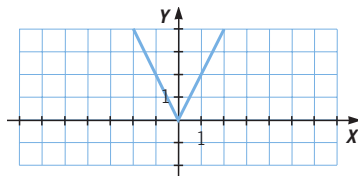
$$a) f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x - 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \rightarrow 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$



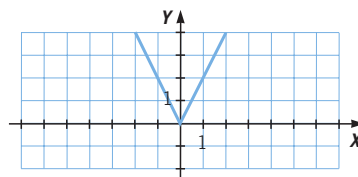
$$b) g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x + 2 < 0 \rightarrow -\infty < x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x + 2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x < +\infty \end{cases}$$



$$c) h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } 2x < 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \\ 2x & \text{si } 2x \geq 0 \rightarrow 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$



$$d) i(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -2x < 0 \rightarrow 0 \leq x < +\infty \\ -2x & \text{si } -2x \geq 0 \rightarrow -\infty < x < 0 \end{cases}$$



**048** Determina una función definida a trozos cuya gráfica pase por  $(-3, 2)$ ,  $(-2, 1)$  y  $(3, 2)$ . ¿Cuántas funciones pasan por los tres puntos?

●●

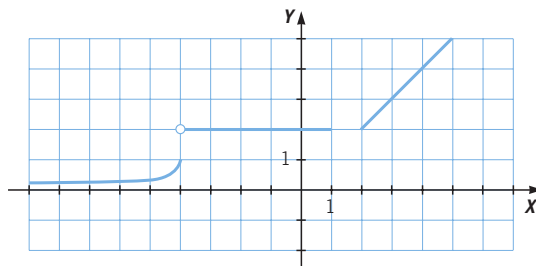
Existen infinitas funciones que pasan por los tres puntos. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$



## Funciones

**049** Estudia la continuidad de esta función.



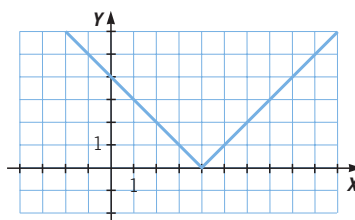
La función es continua en todos los puntos excepto en  $x = -4$  y en el intervalo  $(1, 2)$ .

En  $x = -4$ , la función tiene un salto, y vale 1 a la izquierda y 2 a la derecha.

En el intervalo  $(1, 2)$ , la función no está definida, y estos puntos no pertenecen al dominio.

**050** Representa la función:  $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

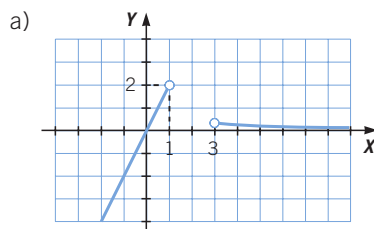
- a) Estudia su continuidad.  
b) ¿Dónde crece y decrece la función?  
c) Escribe sus máximos y mínimos relativos.



- a) La función es continua en  $\mathbb{R}$ .  
b) La función crece en el intervalo  $(4, +\infty)$  y decrece en el intervalo  $(-\infty, 4)$ .  
c) La función tiene un mínimo relativo en  $x = 4$ .

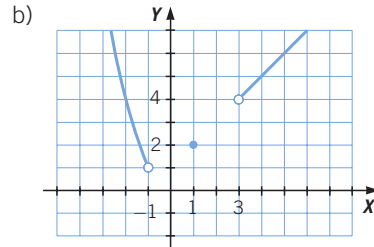
**051** Estudia y representa estas funciones.

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



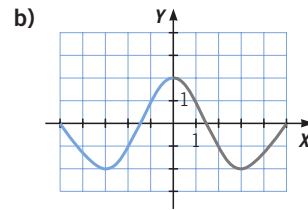
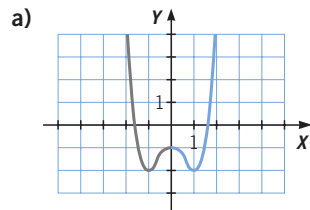
$$\text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \quad \text{Im } f = (-\infty, 2)$$

La función es continua en todo su dominio.

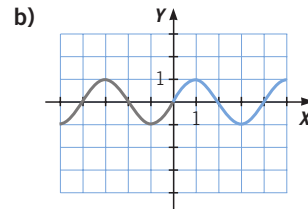
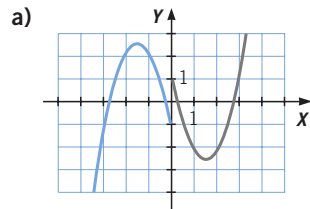


Dom  $f = (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$  Im  $f = (1, +\infty)$   
 La función es continua en  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .

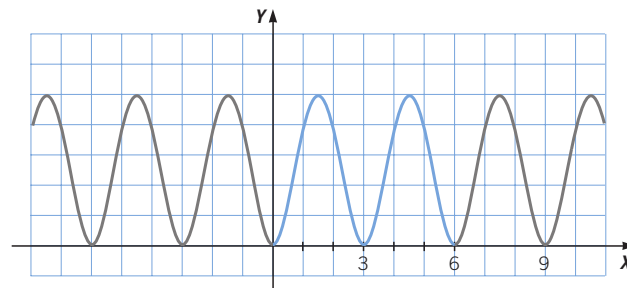
**052** ●● Completa las gráficas para que las funciones sean simétricas respecto del eje  $Y$ .



**053** ●● Completa las gráficas para que estas funciones sean impares.



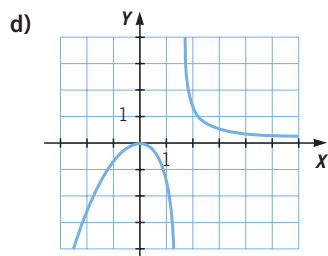
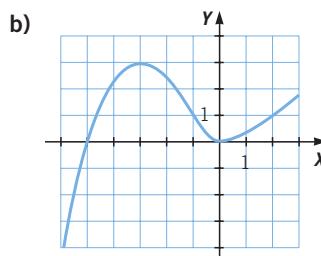
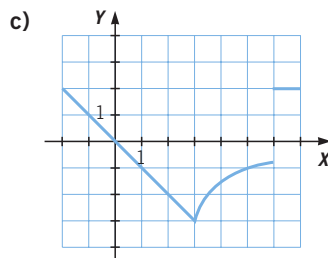
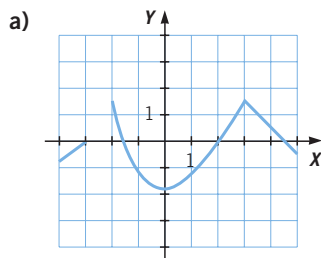
**054** ●● La gráfica pertenece a una función periódica, de período  $T = 3$ .  
 Completa la gráfica a ambos lados y justifica cómo lo haces.



Lo hacemos mediante una traslación.

## Funciones

### 055 Estudia las siguientes funciones.



a) Dominio:  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (-3, -2)$

Recorrido:  $\text{Im } f = (-\infty; 1,5]$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje  $X$  en los puntos  $x = -3$ ;  $x = -1,5$ ;  $x = 2$ ;  $x = 4,5$ ; y al eje  $Y$ , en  $y = -1,8$ .

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en el intervalo  $(-3, -2)$ , donde no está definida.

b) Dominio:  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Recorrido:  $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje  $X$  en  $x = -5$  y en  $(0, 0)$ .

Continuidad: la función es continua en todos los puntos.

Es creciente en  $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$  y es decreciente en  $(-3, 0)$ .

Tiene un máximo relativo en  $x = -3$  y un mínimo relativo en  $x = 0$ .

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

c) Dominio:  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

Recorrido:  $\text{Im } f = (-3, +\infty)$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje  $X$  y al eje  $Y$  en el punto  $(0, 0)$ .

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en  $x = 6$ .

Es decreciente en  $(-\infty, 3)$ , es creciente en  $(3, 6)$  y es constante en  $(6, +\infty)$ .

Tiene un mínimo relativo en  $x = 3$ .

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

d) Dominio:  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1,5\}$

Recorrido:  $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Cortes con los ejes de coordenadas: corta al eje  $X$  y al eje  $Y$  en el punto  $(0, 0)$ .

Continuidad: la función es continua en todos los puntos, menos en  $x = 1,5$ ; donde no está definida.

Es creciente en  $(-\infty, 0)$  y es decreciente en  $(0; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$ .

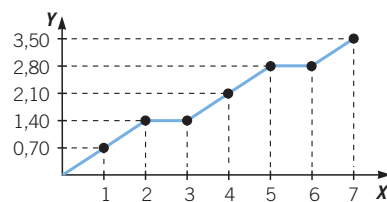
Tiene un máximo relativo en  $x = 0$ .

No presenta ningún tipo de simetría y no es periódica.

**056** En un centro comercial, al comprar 3 kg de naranjas solo pagas 2 kg.

●● Si el kilo de naranjas cuesta 0,70 €, representa la función que relaciona el peso de naranjas ( $x$ ) y su precio ( $y$ ). ¿Es una función definida a trozos? ¿Por qué?

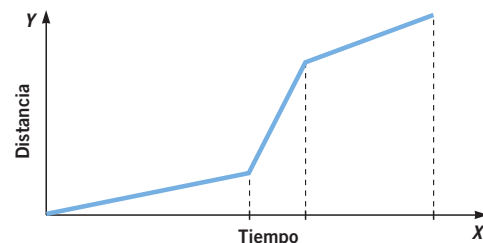
N.º de kilos	1	2	3	4	5	6	7
Precio	0,70	1,40	1,40	2,10	2,80	2,80	3,50



No es una función definida a trozos, porque la expresión algebraica de la función, para cualquier valor de  $x$ , es:  $f(x) = 0,70x$ .

**057** Para ir a su centro escolar, Concha realiza cada día este trayecto y tarda el mismo tiempo aproximadamente: sale de casa y sube una cuesta para llegar a la parada del autobús; se traslada en él y se baja en la tercera parada, donde la espera una amiga, para ir desde allí andando juntas. Dibuja una gráfica que se ajuste a esta situación.

Indica los tramos crecientes y constantes, siendo  $x$  el tiempo en minutos, e  $y$  la distancia recorrida.



En los tres tramos, la función es creciente.

## Funciones

- 058** Un electrocardiograma presenta la variación de actividad coronaria, marcando los movimientos del corazón. ¿Es una función periódica?

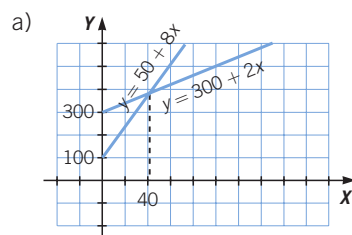


La función es periódica cuando el ritmo cardíaco es constante, y en la gráfica vemos que no lo es.

- 059** Queremos hacer un viaje al extranjero y preguntamos en dos agencias.



- a) Representa las funciones que relacionan los kilómetros recorridos y el precio.  
b) ¿Con qué agencia interesa contratar el viaje?



b) Viajes Águila:  $y = 300 + 2x$

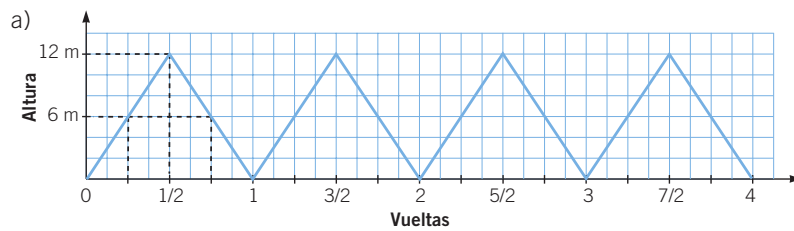
Viajes Princesa:  $y = 50 + 8x$

$$300 + 2x = 50 + 8x \rightarrow x = 41,67$$

Para viajes con trayecto inferior a 41,67 km, nos interesa contratar Viajes Princesa. Y como queremos viajar al extranjero, será mejor contratar Viajes Águila.

**060** En un parque de atracciones hay una noria de 12 m de diámetro.

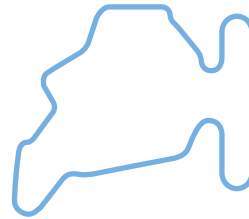
- a) Representa la altura que alcanza un niño que monta en la noria, en cada momento, durante 4 vueltas.
- b) Realiza un boceto de la función, estudiando su periodicidad. ¿Cuál es su período?



- b) La función es creciente hasta alcanzar la altura de 12 m (media vuelta) y, después, es decreciente hasta estar a nivel del suelo (otra media vuelta). El período de la función es una vuelta.

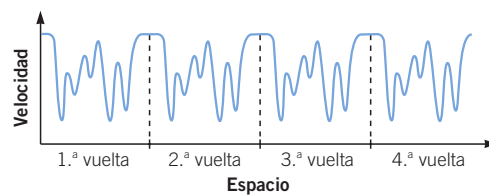
**061** En el Gran Premio de Hungría de Automovilismo, el piloto Fernando Alonso obtuvo su primera victoria en Fórmula 1, en un circuito de 4.381 m de longitud.

- a) Representa aproximadamente la evolución de la velocidad del coche durante 4 vueltas. ¿Es una función periódica?

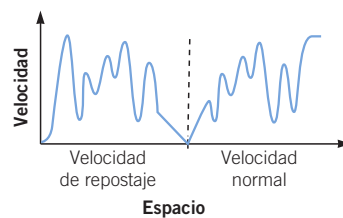


- b) Dibuja la gráfica que corresponda a la vuelta en la que el piloto se detiene a repostar.

- a) Gráfica correspondiente a 4 vueltas:

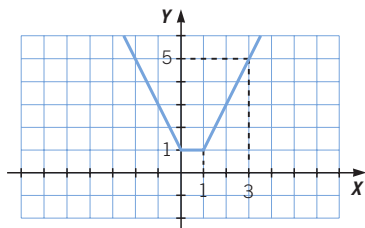


- b) Gráfica correspondiente a la vuelta en la que se detiene a repostar:



## Funciones

**062** Representa la función  $y = |x| + |x - 1|$ .

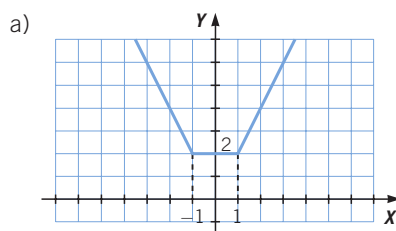


$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

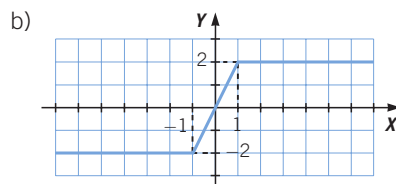
**063** A partir de  $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  representa estas funciones.

a)  $y = |x + 1| + |x - 1|$

b)  $y = |x + 1| - |x - 1|$



$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

**064** Si  $f(f(x)) = 5x - 2.008$  para cualquier valor de  $x$ , demuestra que existe un número entero  $n$  tal que  $f(n) = 5n - 2.008$ . ¿Cuánto vale  $n$ ?

Sabemos que  $f(f(x)) = 5x - 2.008$  para cualquier valor de  $x$ .

Vamos a demostrar que existe un valor tal que  $f(f(x)) = x$ .

$$x = 5x - 2.008 \rightarrow x = \frac{2.008}{4} = 502 \rightarrow f(f(502)) = 502$$

$$\begin{aligned} f(f(502)) = 502 &\rightarrow f(f(f(502))) = f(502) \rightarrow 5f(502) - 2.008 = f(502) \\ &\rightarrow f(502) = \frac{2.008}{4} = 502 \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado que existe un valor  $n = 502$  tal que  $f(n) = n$

$$\rightarrow f(f(n)) = f(n) \text{ y como } f(f(n)) = 5n - 2.008 \text{ para cualquier } n.$$

Para el valor  $n = 512$  tenemos que  $f(f(512)) = 5 \cdot 512 - 2.008$ .

**065** Una función  $f(x)$  es creciente, su dominio es  $[-6, 3]$  y su recorrido es  $[3, 6]$ .

a) ¿Cuánto valen  $f(-6)$  y  $f(3)$ ?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

a)  $f(-6) = 3$ ;  $f(3) = 6$

b) No tiene máximos ni mínimos relativos por ser una función creciente.

### EN LA VIDA COTIDIANA

**066** Un grupo de alumnos va a publicar una revista escolar. Los profesores de los departamentos de Lengua y Literatura y de Matemáticas van a ser los coordinadores.



Los profesores de Matemáticas les proponen simular lo que ocurriría si decidieran vender la revista. Para ello deben preguntar al resto de alumnos y profesores del centro escolar cuánto dinero estarían dispuestos a pagar.

Precio (€)	0	0,25	0,50	1
N.º de personas	150	95	47	18



## Funciones

**Con la información recogida por los alumnos, ¿a qué precio deberían vender la revista para poder comprar el papel necesario para imprimirla?**

Hay  $150 + 95 + 47 + 18 = 310$  alumnos, y si queremos dar una revista a cada uno harán falta 310 revistas, cuyo coste en papel asciende a:

$$310 \cdot 0,20 = 62 \text{ €}.$$

Si vendieran la revista a 1 €, la pagarían 18 personas, de modo que obtendrían 18 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

Si vendieran la revista a 0,50 €, la pagarían  $18 + 47 = 65$  personas, de modo que obtendrían 32,50 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

Y si vendieran la revista a 0,25 €, la pagarían  $18 + 47 + 95 = 160$  personas, de modo que obtendrían 40 €, que es una cantidad insuficiente para comprar el papel de la próxima tirada.

La solución es que cada persona pague lo que considera justo, de manera que la cantidad recaudada ascenderá a:

$$18 \cdot 1 + 47 \cdot 0,50 + 95 \cdot 0,25 = 65,25 \text{ €}.$$

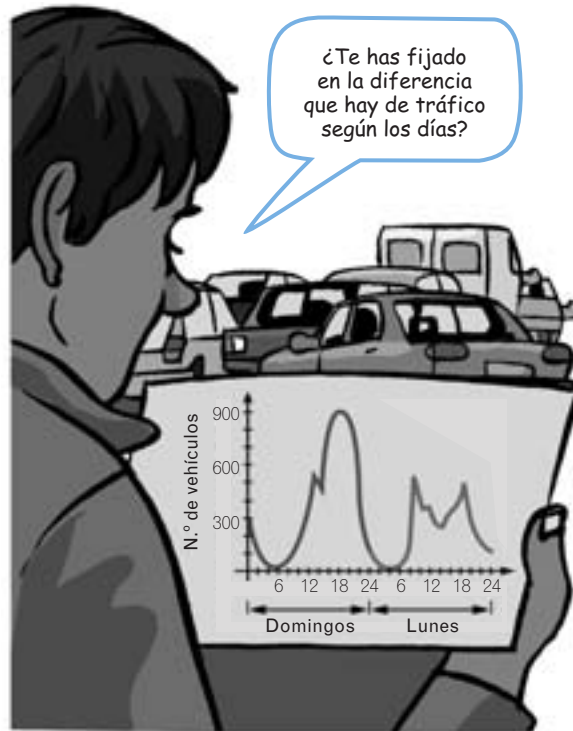
**067**



**Como respuesta a las críticas realizadas por los medios de comunicación en relación con los atascos de cada fin de semana, la Dirección General de Tráfico va a elaborar un informe sobre el volumen de tráfico en las principales carreteras.**



Los resultados se han publicado en forma de gráfica. En ella se muestra la media de vehículos que circulaban en la carretera durante los domingos y los lunes del último mes.



**¿En qué momento se han producido más retenciones? ¿A qué horas se presentan menos problemas de tráfico? Ayúdalos a resolver la situación, y di quién tiene razón.**

El mayor número de atascos se produce en la tarde de los domingos, a las 18:00 h.

Los menores problemas de tráfico se producen en la madrugada.

Por tanto, los medios de comunicación tienen razón en que se producen atascos en ciertos momentos del día. Para evitar estos atascos se debería recomendar a los conductores evitar esos tramos horarios: el domingo, entre las 16:00 h y las 20:00 h, y el lunes, en torno a las 8:00 h y las 19:00 h.