10 Funciones polinómicas y racionales

FUNCIONES POLINÓMICAS

- **DE PRIMER GRADO: RECTAS**
  - $y = mx + n$
- **DE SEGUNDO GRADO: PARÁBOLAS**
  - $y = ax^2 + bx + c$

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

- $y = \dfrac{k}{x}$

FUNCIONES RACIONALES: HIPÉRBOLAS

- $y = \dfrac{k}{x - a}$
- $y = \dfrac{k}{x - a} + b$

Funesto presagio

Moscú amaneció plomizo, tan negro que más parecía la continuación de la noche que el nuevo día.

Esa misma sensación tuvo Christian Goldbach cuando, como cada mañana, se dirigió al palacio donde el joven zar Pedro II lo esperaba para recibir su formación. Tras un corto trayecto, su carruaje se detuvo ante el puesto de la guardia real.

–La entrada está prohibida hasta nueva orden.

–¡Soy el tutor del zar! –dijo Goldbach asomándose a la ventanilla del carruaje.

El jefe de la guardia ni siquiera se inmutó y con voz impersonal, casi metálica, le dijo de manera tajante:

–Su trabajo en palacio ha terminado.

–¿Por qué? ¿No está contento el zar con mi trabajo?

–Pretendéis decirme que no habéis oído los cañones, ni las campanas de las iglesias… Ni habéis visto a los correos ir y venir como locos, ni oís los lamentos de toda Rusia –espetó el soldado con furia contenida.

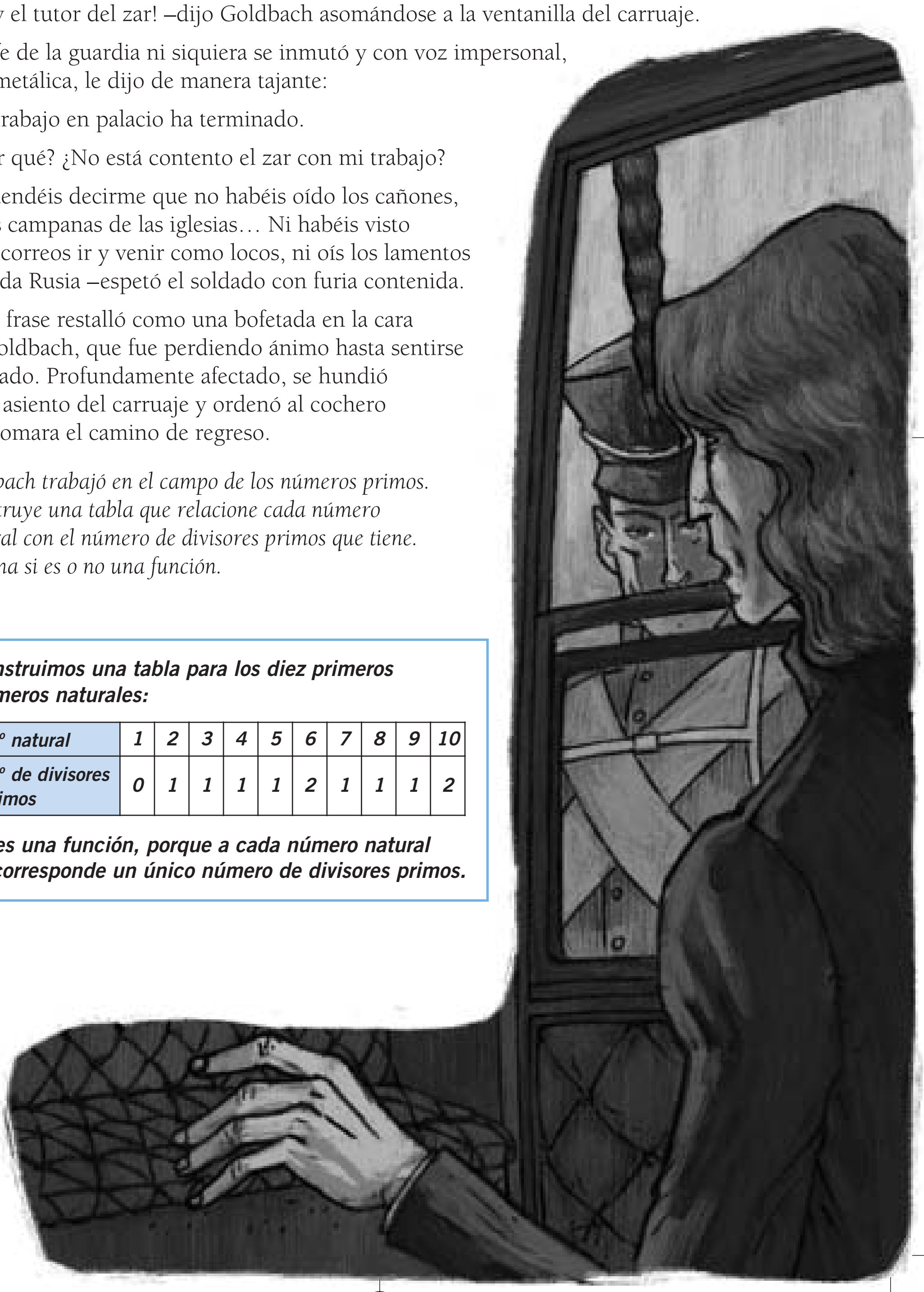
Cada frase restalló como una bofetada en la cara de Goldbach, que fue perdiendo ánimo hasta sentirse mareado. Profundamente afectado, se hundió en el asiento del carruaje y ordenó al cochero que tomara el camino de regreso.

Goldbach trabajó en el campo de los números primos. Construye una tabla que relacione cada número natural con el número de divisores primos que tiene. Razona si es o no una función.

Construimos una tabla para los diez primeros números naturales:

N.º natural	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
N.º de divisores primos	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*

Sí es una función, porque a cada número natural le corresponde un único número de divisores primos.



Funciones polinómicas y racionales

EJERCICIOS

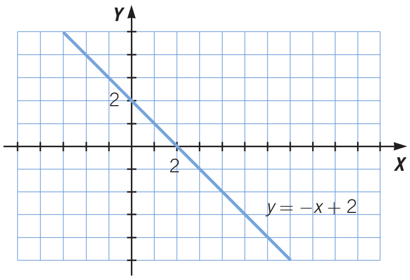
001 **Decide si las siguientes funciones son polinómicas o no.**

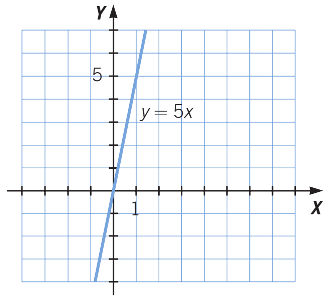
a) $y = -x + 2$ **c)** $y = 5x$

b) $y = -x + \dfrac{2}{x}$ **d)** $y = 5\sqrt{x} + 2$

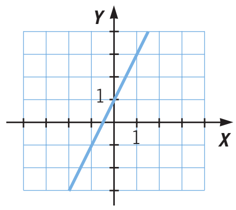
Son funciones polinómicas las de los apartados a) y c).

002 **Representa gráficamente las funciones polinómicas del ejercicio anterior.**





003 **Razona de qué tipo es la función representada, y determina su expresión algebraica y su pendiente.**



Es una función afín, de ecuación $y = 2x + 1$.
Su pendiente es 2.

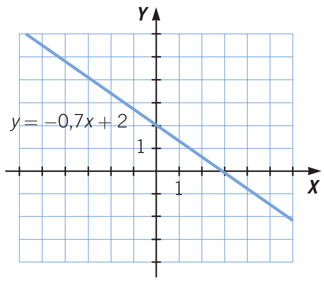
004 **Decide de qué tipo son estas funciones polinómicas y represéntalas.**

a) $f(x) = -0{,}7x + 2$

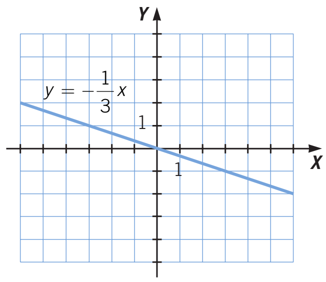
b) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x$

c) $f(x) = -1$

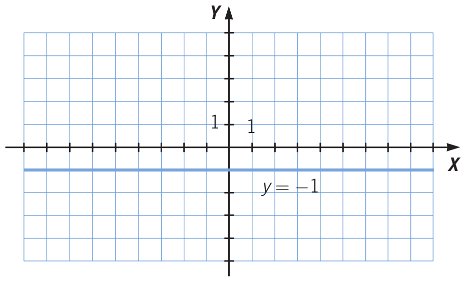
a) Afín



b) Lineal

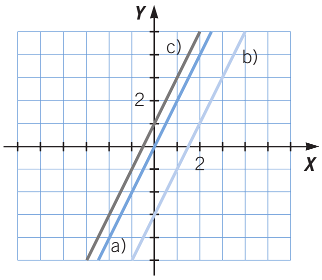


c) Constante



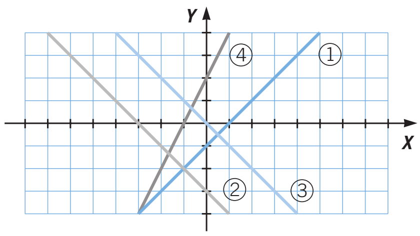
005 **Representa, en unos mismos ejes, estas funciones y explica sus diferencias.**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$ **c)** $y = 2x + 1$



Son rectas paralelas, con la misma pendiente. Se diferencian en su ordenada en el origen.

006 **Asocia cada recta con su expresión algebraica.**



a) $y = 2x + 2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}$

b) $y = -x - 3$ **d)** $y = -x$

a) ④

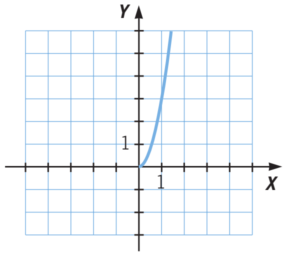
b) ②

c) No se corresponde con ninguna de las rectas dibujadas en el gráfico.

d) ③

La recta ① tiene por ecuación $y = x - 1$ y tampoco tiene correspondencia con ninguna de las ecuaciones.

007 **Completa esta parábola y señala sus elementos y sus propiedades.**



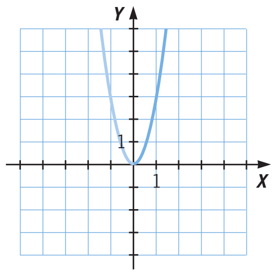
El dominio de la función es todos los números reales: $\mathbb{R}$.

Es continua en todo su dominio.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

Pasa por los puntos (−1, 3) y (1, 3).



008 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = 3x^2$

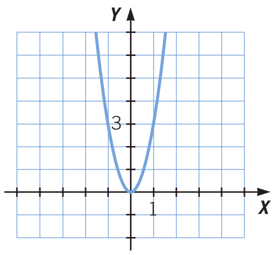
b) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

c) $y = -2x^2$

d) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$

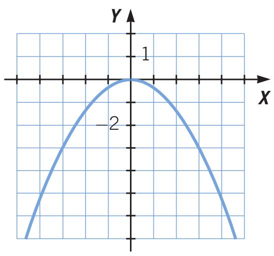
a) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	12	3	0	3	12



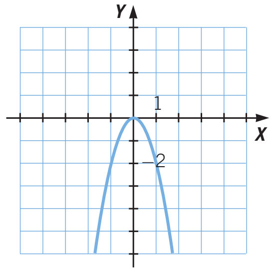
b) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−6	−3	0	3	6
y	−12	−3	0	−3	−12



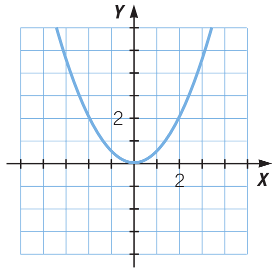
c) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



d) Construimos una tabla con valores alrededor del vértice.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



009 **¿Qué ocurre si $a = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$?**

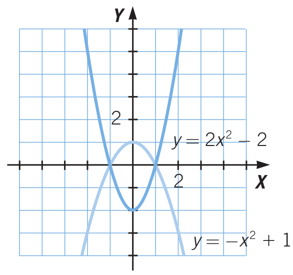
Si $a = 0$, sería la ecuación de una recta en vez de la ecuación de una parábola.

010 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = 2x^2 - 2$ **b)** $y = -x^2 + 1$

a) El vértice es el punto (0, −2). Las ramas de la parábola van hacia arriba y es más cerrada que la parábola de ecuación $y = x^2$.

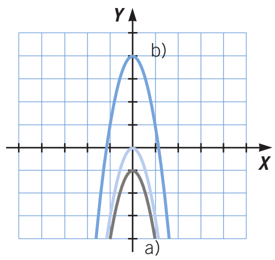
b) El vértice es el punto (0, 1) y se obtiene trasladando la parábola $y = x^2$ una unidad hacia arriba e invirtiendo el sentido de las ramas.



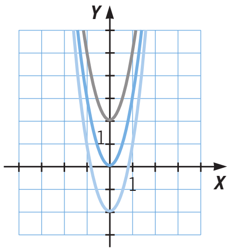
011 **Representa la función $y = -3x^2$ y, a partir de ella, explica cómo se pueden representar estas funciones.**

a) $y = -3x^2 - 1$ **b)** $y = -3x^2 + 4$

Las parábolas que corresponden a las funciones del tipo $y = -3x^2 + c$ se obtienen trasladando verticalmente la parábola $y = -3x^2$, c unidades hacia arriba si $c > 0$, o c unidades hacia abajo si $c < 0$.



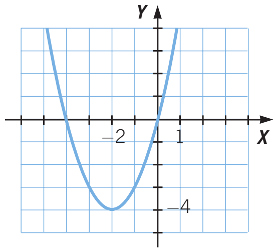
012 **Si la parábola de color naranja corresponde a la función $y = 3x^2$, ¿a qué funciones corresponden las otras dos?**



La parábola roja corresponde a $y = 3x^2 + 2$ y la parábola verde corresponde a $y = 3x^2 - 2$.

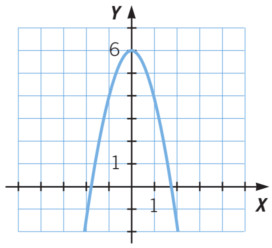
013 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 + 4x$ **b)** $y = -2x^2 + 6x$



a) El eje de simetría es la recta $x = -2$.
El vértice de la parábola es el punto $(-2, -4)$.

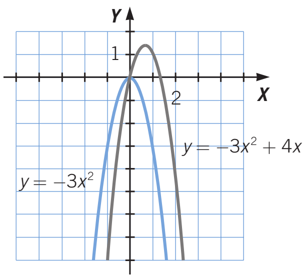
x	−4	−3	−2	−1	0
y	0	−3	−4	−3	0



b) El eje de simetría es la recta $x = 0$.
El vértice de la parábola es el punto $(0, 6)$.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	4	6	4	−2

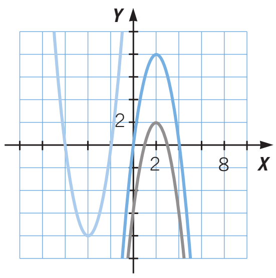
014 **Dibuja las parábolas de las funciones $y = -3x^2$ e $y = -3x^2 + 4x$. Estudia el desplazamiento que presenta la última con respecto a la primera.**



Se desplaza de forma oblicua $y = -3x^2$, pasando a ser el vértice

$$\left(\frac{-4}{-6}, \frac{-16}{-12}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

015 **La parábola de color verde corresponde a $y = -2x^2 + 8x$. ¿Qué funciones representan las otras dos?**



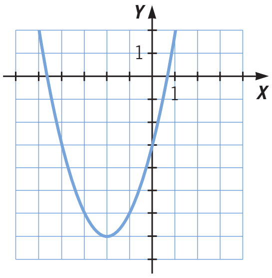
La parábola de color rojo es:
$y = -2x^2 + 8x - 6$

La parábola de color amarillo es:
$y = 2(x + 6)^2 - 8(x + 6) = 2x^2 + 16x + 24$

016 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = x^2 + 4x - 3$ **b)** $y = -2x^2 + 6x + 2$

a)

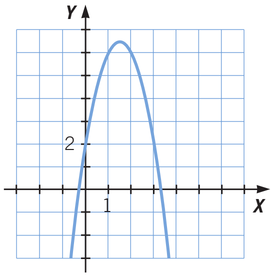


El vértice está en $(-2, -7)$.

La tabla de valores es:

x	y
-4	-3
-3	-6
-2	-7
-1	-6
0	-3

b)



El vértice está en

$$\left(\frac{-6}{-4}, \frac{-36-16}{8}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

La tabla de valores es:

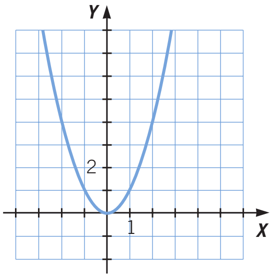
x	y
0	2
0,5	4,5
1	6
1,5	6,5
2	6
2,5	4,5
3	2

017 **Representa estas funciones y compara sus gráficas.**

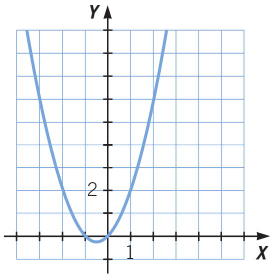
a) $y = x^2$ **c)** $y = x^2 + x$ **e)** $y = x^2 + x + 1$

b) $y = -x^2$ **d)** $y = x^2 - x$ **f)** $y = x^2 - x - 1$

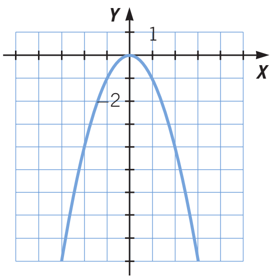
a)



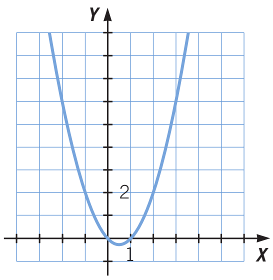
c)



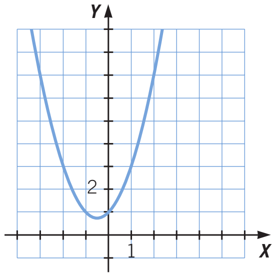
b)



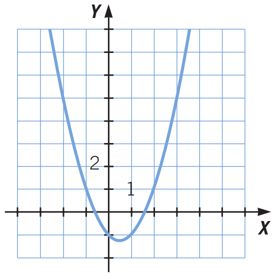
d)



e)

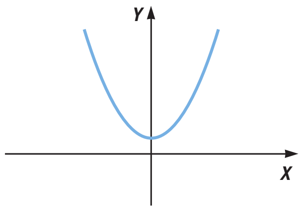


f)



Todas las parábolas son similares, tienen como base $y = x^2$, y se consiguen trasladando la parábola inicial, excepto $y = -x^2$, que se obtiene por simetría.

018 **Explica cómo son los coeficientes de la función cuya gráfica es esta parábola. ¿Hay alguno que sea cero? ¿Qué pasaría si cambiamos de signo a todos?**

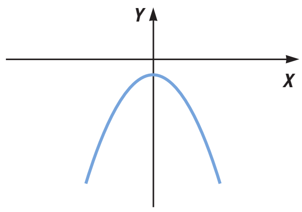


La gráfica tiene un mínimo en el vértice, luego $a > 0$.

El eje de ordenadas coincide con el eje de simetría, por lo que $b = 0$.

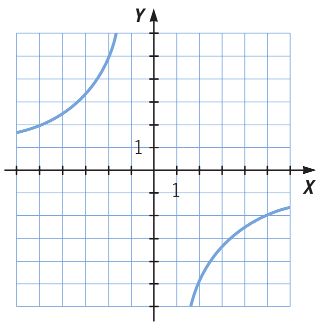
El vértice está desplazado hacia arriba respecto de la parábola $y = ax^2$, luego $c > 0$.

Si cambiamos todos los coeficientes de signo obtendríamos la parábola.



019 **Representa la función $y = -\dfrac{10}{x}$.**

x	y
−5	2
−4	2,5
−3	3,3333
−2	5
−1	10
1	−10
2	−5
3	−3,3333
4	−2,5
5	−2

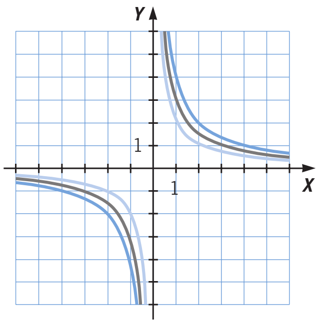


020 **Dadas las funciones:** $y = \frac{2}{x}$ $\quad y = \frac{3}{x}$ $\quad y = \frac{4}{x}$

a) Represéntalas en los mismos ejes.

b) ¿Qué gráfica está más lejos del origen?

a)



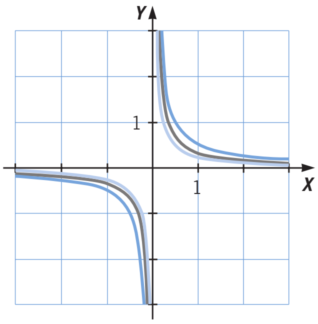
b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \frac{4}{x}$.

021 **Dadas las funciones:** $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$ $\quad y = \frac{\frac{1}{3}}{x}$ $\quad y = \frac{\frac{1}{4}}{x}$

a) Represéntalas en los mismos ejes.

b) ¿Cuál de ellas se aleja más del origen?

a)

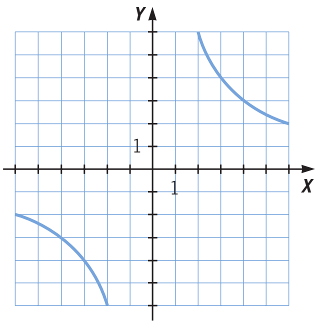


b) La gráfica que está más lejos del origen es $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$.

022 **El producto de *x* e *y* es 12. Realiza una tabla de valores y representa la función correspondiente.**

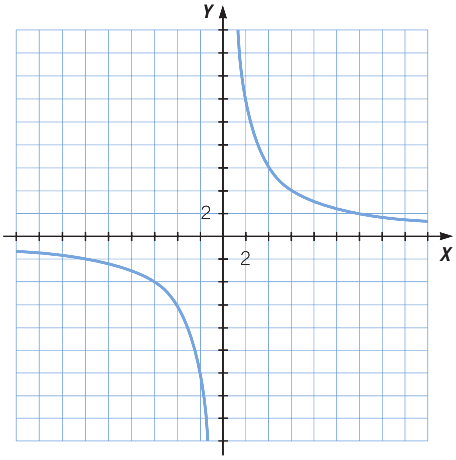
$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

x	y
−10	−1,2
−8	−1,5
−6	−2
−4	−3
−2	−6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



023 **Representa la función $y = \dfrac{24}{x}$ y escribe sus características.**

x	y
−16	−1,5
−12	−2
−8	−3
−6	−4
−4	−6
−3	−8
−2	−12
−1	−24
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
16	1,5



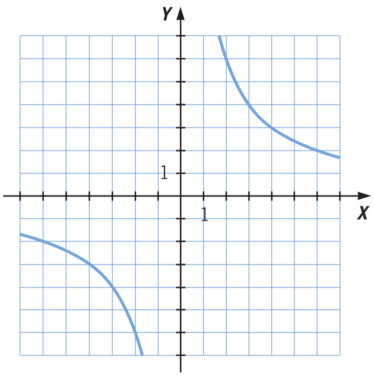
- El dominio lo forman todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- La función no es continua en $x = 0$.
- La gráfica no corta a los ejes de coordenadas.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- La función es decreciente y la gráfica está situada en los cuadrantes 1.° y 3.°.

024 **El área de un triángulo es 12 m². Escribe la expresión de la función que relaciona su base con su altura, y represéntala.**

La expresión en función de la base (x) y la altura (y) es:

$$x \cdot y = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$$

x	y
−10	−1,2
−8	−1,5
−6	−2
−4	−3
−2	−6
2	6
4	3
6	2
8	1,5
10	1,2



025 **Responde a estas preguntas para la función $y = -\frac{k}{x}$, con $k > 0$.**

a) ¿Cuál es su dominio?

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Si pasa por el punto (1, −1), ¿puede pasar por el punto (−1, 2)?

a) El dominio es todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) La función es creciente.

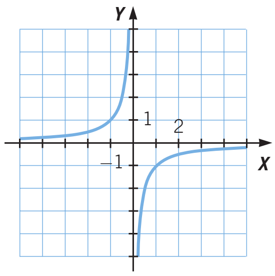
c) No puede pasar por (−1, 2), y por simetría pasará por (−1, 1).

026 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = \frac{-1}{x}$ **b)** $y = \frac{-1}{x-1}$ **c)** $y = \frac{-1}{x+1}$

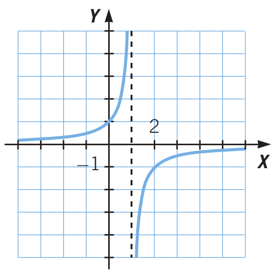
a) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

x	−2	−1	1	2
y	1/2	1	−1	−1/2



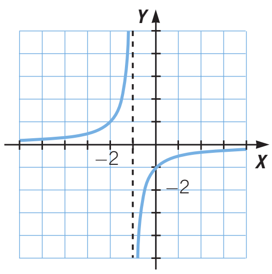
b) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = 1$ e $y = 0$.

x	−1	0	2	3
y	1/2	1	−1	−1/2



c) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = -1$ e $y = 0$.

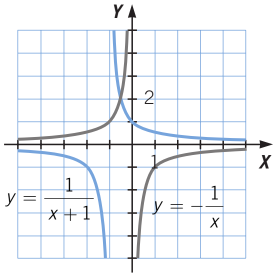
x	−3	−2	0	1
y	1/2	1	−1	−1/2



027 **A partir de la gráfica de la función $y = \dfrac{-1}{x}$, representa la gráfica de:**

$$y = \frac{1}{x+1}$$

Dibujamos $y = \dfrac{-1}{x}$, la trasladamos para conseguir $y = \dfrac{-1}{x+1}$ y la invertimos respecto del eje X para conseguir $y = \dfrac{1}{x+1}$.



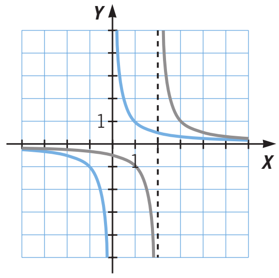
028 **Conocida la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$, representada en rojo, ¿qué expresión algebraica tiene la gráfica verde?**

La gráfica de color verde es una traslación de $y = \dfrac{1}{x}$, dos unidades a la derecha.

Los ejes de la gráfica de color verde son las rectas $x = 2$ e $y = 0$, por lo que su expresión algebraica será de la forma $y = \dfrac{k}{x-2}$, con $k > 0$.

Además, la gráfica pasa por el punto (3, 1), luego $k = 1$.

La ecuación de la hipérbola es $y = \dfrac{1}{x-2}$.



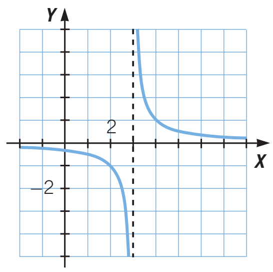
029 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$

b) $y = \dfrac{1}{x-3} + 3$

a) La hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.
Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 0$.

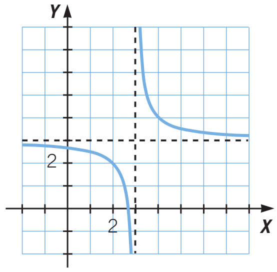
x	1	2	4	5
y	−1/2	−1	1	1/2



b) Como el numerador tiene signo positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 3$.

x	1	2	4	5
y	5/2	2	4	7/2



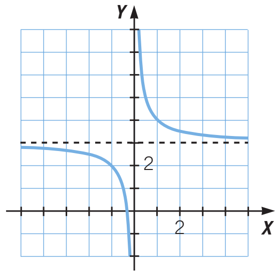
030 **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = \dfrac{1}{x} + 3$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x - 3} + 3$

a) Como el numerador tiene signo positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.

Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 3$.

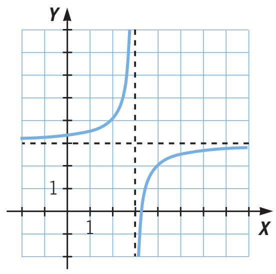
x	−2	−1	1	2
y	5/2	2	4	7/2



b) Como el numerador tiene signo negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°.

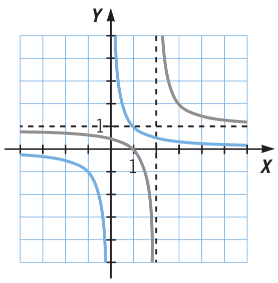
Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = 3$.

x	1	2	4	5
y	7/2	4	2	5/2



031 **Conocida la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$, representada en color rojo, ¿cuál es la expresión algebraica de la hipérbola de color verde?**

La gráfica de color verde es una traslación de $y = \dfrac{1}{x}$ dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.



Los ejes de la gráfica de color verde son las rectas $x = 2$ e $y = 1$, por lo que su expresión algebraica será de la forma $y = \dfrac{k}{x - 2} + 1$, con $k > 0$.

Además, la gráfica pasa por el punto (1, 0), luego $k = 1$.

La ecuación de la hipérbola es $y = \dfrac{1}{x - 2} + 1$.

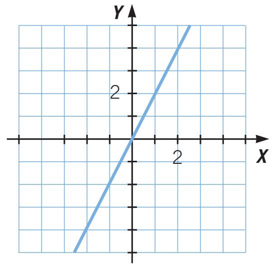
ACTIVIDADES

032 **Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de primer grado.**

a) $y = 2x$ **b)** $y = -2x$ **c)** $y = 2x - 3$ **d)** $y = -2x + 3$

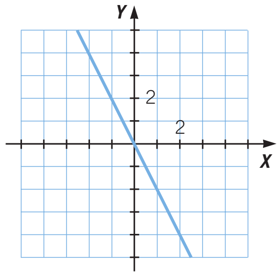
a) Su pendiente es 2, luego es creciente.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

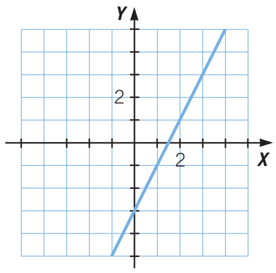


b) Su pendiente es -2, y es decreciente.

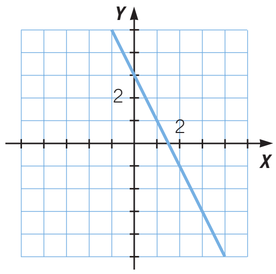
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2	-4



c) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia abajo la gráfica de la recta $y = 2x$.
Es creciente y su pendiente es 2.



d) Esta recta se obtiene trasladando tres unidades hacia arriba la gráfica de la recta $y = -2x$.
Es decreciente y su pendiente es -2.



033 **Pon un ejemplo de función lineal, otro de función afín y otro de función constante. Enumera sus semejanzas y diferencias.**

Función lineal: $y = -3x$ Función constante: $y = -4$

Función afín: $y = -2x + 1$

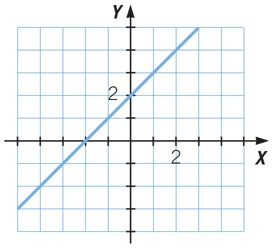
Todas las funciones son rectas, la función constante no depende de x, la función lineal pasa por el origen de coordenadas y la función afín no pasa por el origen de coordenadas; estas dos últimas tienen pendiente distinta de cero.

034 **Representa estas funciones.**

a) $f(x) = x + 2$ **b)** $g(x) = -x - 2$ **c)** $h(x) = 3$ **d)** $i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$

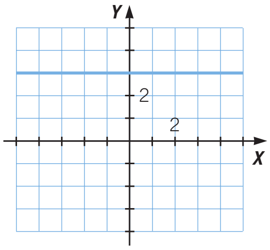
a)

x	-2	0
$f(x) = x + 2$	0	2



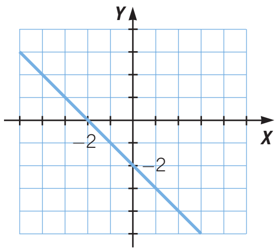
c)

x	-2	0
$h(x) = 3$	3	3



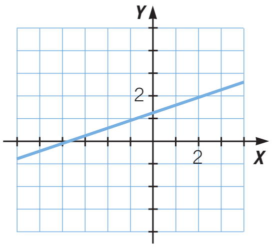
b)

x	0	1
$g(x) = -x - 2$	-2	-3



d)

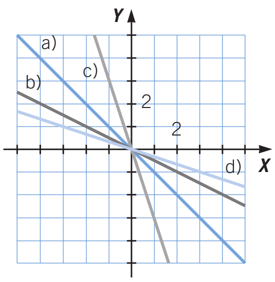
x	0	3
$i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$



035 **Representa en los mismos ejes de coordenadas estas funciones. Explica sus diferencias.**

a) $y = -x$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x$ **c)** $y = -3x$ **d)** $y = -\frac{1}{3}x$

Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.

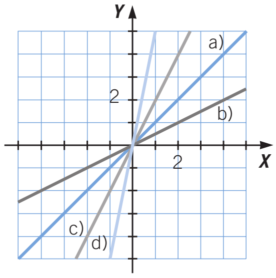


Funciones polinómicas y racionales

036 **Representa estas funciones en los mismos ejes de coordenadas. ¿Qué diferencias hay?**

a) $y = x$ **c)** $y = 2x$

b) $y = \frac{1}{2}x$ **d)** $y = 5x$

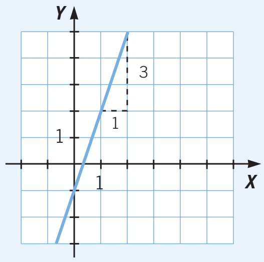


Todas son funciones lineales que se diferencian en el valor de su pendiente.

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN AFÍN A PARTIR DE SU GRÁFICA?

¿A qué función corresponde esta gráfica?



PRIMERO. Se halla la pendiente. Para ello, se calcula la variación de las variables x e y entre dos puntos de la recta:

$$m = \frac{3}{1} = 3$$

SEGUNDO. Se determina la ordenada en el origen. El punto de corte de la función con el eje Y es $(0, -1)$.

TERCERO. Se escribe la expresión algebraica de la función con los datos obtenidos.

$$y = mx + n \rightarrow y = 3x - 1$$

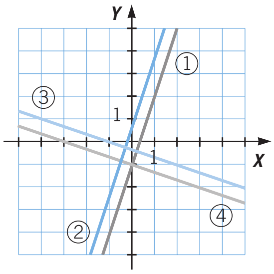
038 **Relaciona cada expresión algebraica con su gráfica.**

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -\frac{1}{3}x - 1$

c) $y = 3x + \frac{2}{3}$

d) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$



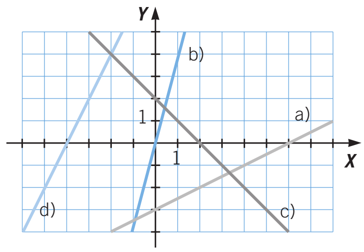
Las rectas son paralelas dos a dos, luego tienen pendientes iguales dos a dos.

Las rectas 1 y 2 son crecientes, es decir, tienen pendiente positiva y sus expresiones algebraicas serán a) y c).

Para distinguir una gráfica de otra calculamos su punto de corte con el eje Y. Deducimos que la gráfica 1 corresponde a a) y la gráfica 2 a c).

Con un razonamiento análogo deducimos que la gráfica 3 corresponde a d) y la gráfica 4 corresponde a b).

039 Calcula las expresiones algebraicas de las funciones representadas por estas rectas.



a) $y = \frac{1}{2}x - 3$

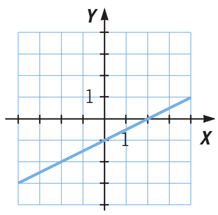
b) $y = 4x$

c) $y = -x + 2$

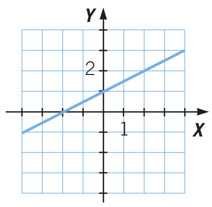
d) $y = 2x + 8$

040 ¿Cuál de las rectas tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 1$?

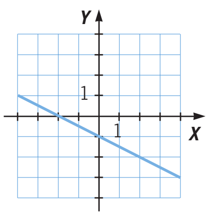
a)



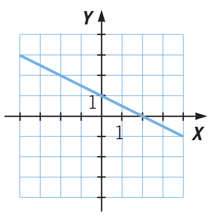
c)



b)

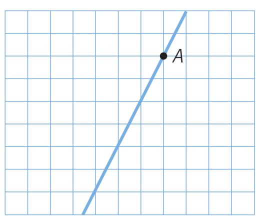


d)



La recta que tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 1$ es la del apartado b), ya que es decreciente y pasa por el punto $(0, -1)$.

041 Esta gráfica corresponde a una función de proporcionalidad directa. Dibuja los ejes si la abscisa del punto *A* es 3.

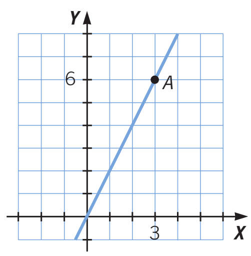


a) ¿Cuál es la ordenada del punto *A*?

b) ¿Y la expresión algebraica de la función?

a) La ordenada del punto *A* es 6.

b) $y = 2x$



Funciones polinómicas y racionales

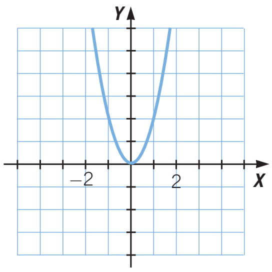
042 **Estudia y representa las siguientes funciones polinómicas de segundo grado.**

a) $y = 2x^2$ **b)** $y = -2x^2$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **d)** $y = \frac{x^2}{4}$

a) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

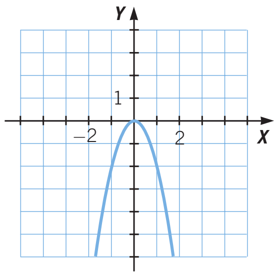
x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



b) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un máximo.

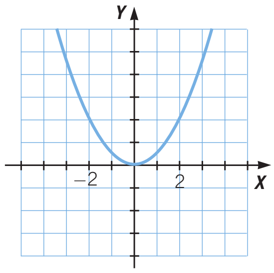
x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



c) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

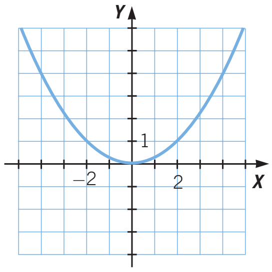
x	−2	−1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2



d) La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	0,25	0	0,25	1



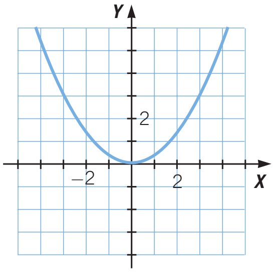
043 **Representa la función polinómica de segundo grado $y = \frac{1}{3}x^2$ a partir de una tabla de valores.**

a) ¿Cuál es el vértice de la parábola?

b) Determina la ecuación de la recta que es su eje de simetría.

La función es simétrica respecto del eje de ordenadas.

x	−2	−1	0	1	2
y	4/3	1/3	0	1/3	4/3

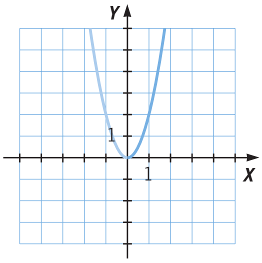


a) El vértice es el punto (0, 0), donde tiene un mínimo.

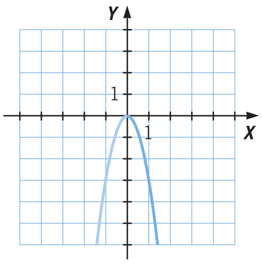
b) El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 0$.

044 **Completa las siguientes parábolas, teniendo en cuenta que son simétricas respecto de un eje que pasa por su vértice.**

a)



b)



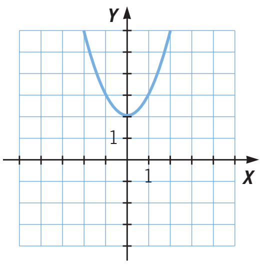
Escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones.

a) $y = 2x^2$

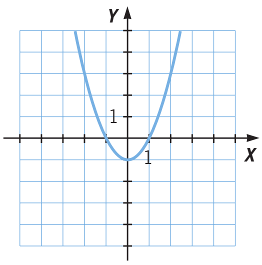
b) $y = -3x^2$

045 **Calcula cuál es el valor de la constante c en la expresión $y = x^2 + c$ de estas parábolas. Explica cómo lo haces.**

a)



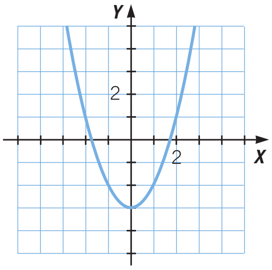
b)



a) El vértice de la parábola es el punto (0, 2), y sustituyendo en $y = x^2 + c$, resulta que $c = 2$. Luego la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2$.

b) El vértice de la parábola es el punto (0, −1), y sustituyendo en la expresión $y = x^2 + c$, resulta que $c = -1$. Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 1$.

046 ●● **Determina el recorrido de la función $y = x^2 - 3$, representando primero la parábola correspondiente. ¿Existe alguna función polinómica de segundo grado cuyo recorrido sea todos los números reales? ¿Por qué?**



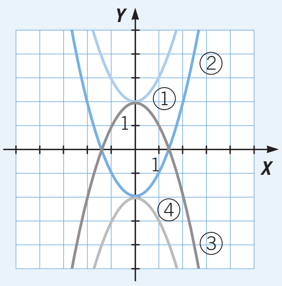
El recorrido de la parábola es el intervalo $[-3, +\infty)$.

No existe ninguna parábola cuyo recorrido sea todos los números reales, porque siempre está limitado por el vértice.

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE PUEDEN RELACIONAR ALGUNAS PARÁBOLAS CON LAS ECUACIONES?

Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.



a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x^2 - 2$

c) $y = -x^2 + 2$

d) $y = -x^2 - 2$

PRIMERO.

Se relaciona la existencia de máximos o mínimos con el valor de a.

Las parábolas ① y ② presentan un mínimo $\rightarrow a > 0$

Las parábolas ③ y ④ presentan un máximo $\rightarrow a < 0$

Por tanto, las parábolas ① y ② corresponden a las ecuaciones c) y d), y las parábolas ③ y ④ a a) y b).

SEGUNDO. Se estudian sus ejes de simetría. El eje de simetría de todas las parábolas es $x = 0$. Por tanto, resulta que $b = 0$.

TERCERO. Se estudian las traslaciones de cada parábola.

La parábola ① está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = x^2$.
Su ecuación es $y = x^2 + 2$.

La parábola ② está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = x^2$.
Su ecuación es $y = x^2 - 2$.

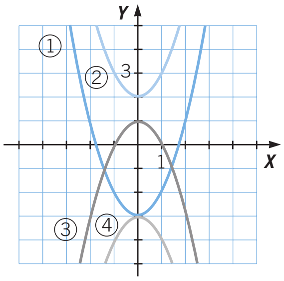
La parábola ③ está trasladada 2 unidades hacia arriba respecto de $y = -x^2$.
Su ecuación es $y = -x^2 + 2$.

La parábola ④ está trasladada 2 unidades hacia abajo respecto de $y = -x^2$.
Su ecuación es $y = -x^2 - 2$.

048 **Relaciona cada parábola con su correspondiente expresión algebraica.**

a) $y = x^2 - 3$ **c)** $y = x^2 + 2$

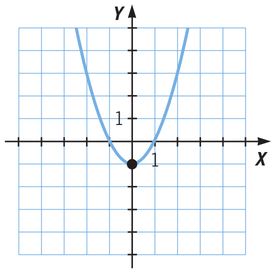
b) $y = -x^2 + 1$ **d)** $y = -x^2 - 3$



Las dos parábolas que tienen un mínimo relativo son ① y ②, que se corresponden con las expresiones $y = x^2 - 3$ e $y = x^2 + 2$, respectivamente.

Las gráficas ③ y ④, que poseen un máximo relativo, se corresponden con las expresiones $y = -x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 3$, respectivamente.

049 **Calcula la expresión algebraica de la siguiente parábola.**



Esta parábola tiene un mínimo, luego el coeficiente de x^2 es $a > 0$.

El eje de simetría es el eje de ordenadas, por lo que su expresión es de la forma $y = ax^2 + c$, con $a > 0$.

El vértice está en el punto $(0, -1)$, siendo $c = -1$.

Corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = -1$.

La expresión algebraica de la parábola es $y = x^2 - 1$.

050 **Halla los cortes con los ejes, el vértice y la ecuación del eje de simetría de estas parábolas.**

a) $y = -x^2 - 3x$ **c)** $y = \frac{3}{2}x^2 - x$

b) $y = x^2 - \frac{2}{3}x$ **d)** $y = x^2 + 2x$

a) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-3, 0)$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{-3}{2}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

b) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{9}\right)$.

c) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{3}$ y el vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}\right)$.

d) Corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 0)$.

El eje de simetría es la recta $x = -1$ y el vértice es el punto $(-1, -1)$.

Funciones polinómicas y racionales

051 **Analiza cómo será la gráfica de estas funciones polinómicas sin representarlas.**

a) $y = x^2 - 3x^2 + 4$ **b)** $y = -x - 3$

a) La función $y = x^2 - 3x^2 + 4$ es un polinomio de segundo grado, luego su gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es $-2 < 0$, por lo que la parábola tiene un máximo en el vértice.

El coeficiente de x es 0, y el eje de la parábola es la recta $x = 0$.

Su vértice es el punto (0, 4).

b) La función $y = -x - 3$ es un polinomio de primer grado, y su gráfica es una recta.

El coeficiente de x es $-1 < 0$, la recta es decreciente, su pendiente es negativa y pasa por el punto (0, −3).

052 **Realiza, analizando el valor de los coeficientes, una aproximación de la gráfica de esta función polinómica.**

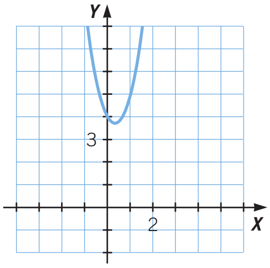
$$y = 3x^2 - 2x + 4$$

La función $y = 3x^2 - 2x + 4$ es un polinomio de segundo grado y su representación gráfica es una parábola.

El coeficiente de x^2 es positivo, por lo que la parábola tiene un mínimo en el vértice. Como este coeficiente, en valor absoluto, es mayor que 1, sus ramas están más cerradas que las de la parábola $y = x^2$.

El eje es la recta $x = \frac{1}{3}$ y su vértice es el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

053 **Representa la parábola $y = 3x^2 - 2x + 4$, y comprueba que la aproximación de la actividad anterior es correcta.**

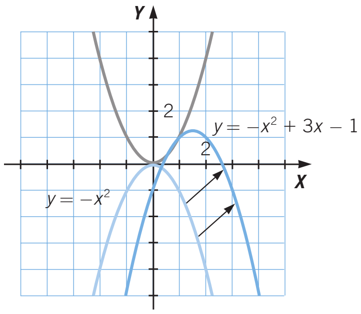


054 **A partir de la gráfica de la función $y = x^2$, describe cómo realizarías la gráfica de la función polinómica $y = -x^2 + 3x - 1$.**

Como son funciones polinómicas de segundo grado, sus representaciones son parábolas. Analizando el coeficiente de x^2 observamos que son iguales en valor absoluto, $|1| = |-1|$, pero de signo contrario.

Esto quiere decir que las dos parábolas son iguales en cuanto a la abertura de sus ramas, pero $y = -x^2 + 3x - 1$ tiene un máximo en el vértice, pues es una traslación de la parábola $y = -x^2$.

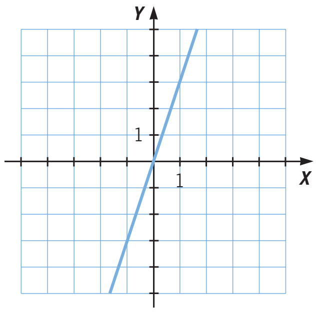
El eje de la parábola es la recta $x = \frac{3}{2}$, y el vértice es el punto de coordenadas $V\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$. Para representarla hay que trasladar el vértice de la parábola $y = -x^2$ al nuevo vértice.



055 **Discute cómo serán los coeficientes de la expresión algebraica que corresponde a cada una de estas parábolas o rectas.**

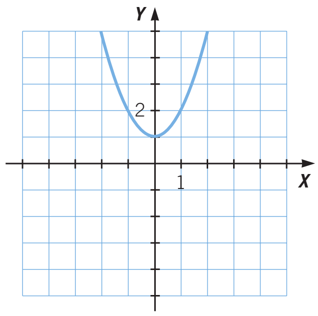
a) Es una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$.

- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow$ $n = 0$.
- La función es creciente $\rightarrow$ $m > 0$.
- La pendiente es 3, porque al aumentar una unidad en el eje X, se aumentan tres unidades en el eje $Y \rightarrow$ $m = 3$.
- La ecuación es $y = 3x$.



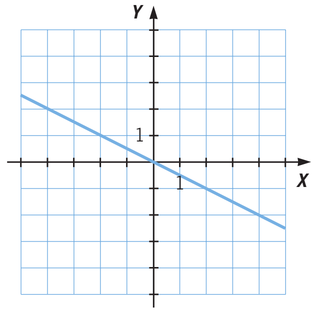
b) Es una parábola $\rightarrow$ $y = ax^2 + bx + c$.

- Tiene un mínimo relativo en el vértice $\rightarrow$ $a > 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2$ $\rightarrow$ $|a| = 1$.
- El eje de simetría es el eje de ordenadas Y $\rightarrow$ $b = 0$.
- El vértice es el punto de coordenadas $V(0, 1)$ $\rightarrow$ $c = 1$.
- La ecuación de la parábola es por tanto $y = x^2 + 1$.



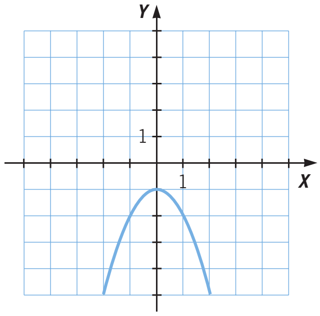
c) Es una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$.

- Pasa por el origen de coordenadas, luego la función es lineal $\rightarrow$ $n = 0$.
- La función es decreciente $\rightarrow$ $m < 0$.
- La pendiente es $-\dfrac{1}{2}$, ya que al aumentar una unidad en el eje X se disminuye media unidad en el eje Y $\rightarrow$ $m = -\dfrac{1}{2}$.
- La ecuación es $y = -\dfrac{x}{2}$.



d) Es una parábola $\rightarrow$ $y = ax^2 + bx + c$.

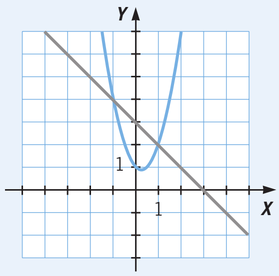
- Tiene un máximo en el vértice $\rightarrow$ $a < 0$.
- Es igual de cerrada que $y = x^2$ $\rightarrow$ $|a| = 1$.
- El eje de simetría es el eje Y $\rightarrow$ $b = 0$.
- El vértice es $V(0, -1)$ $\rightarrow$ $c = -1$.
- La ecuación es $y = -x^2 - 1$.



056 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA?

Calcula los puntos de intersección de la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = 2x^2 - x + 1$.



PRIMERO. Se plantea un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} y &= -x + 3 \\ y &= 2x^2 - x + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow -x + 3 = 2x^2 - x + 1$$

SEGUNDO. Se resuelve el sistema.

$$-x + 3 = 2x^2 - x + 1 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

TERCERO. Se sustituyen estos valores en las ecuaciones y se obtienen los puntos de corte.

$$y = -x + 3 \xrightarrow{x=1} y = 2 \rightarrow A(1, 2)$$
$$\xrightarrow{x=-1} y = 4 \rightarrow B(-1, 4)$$

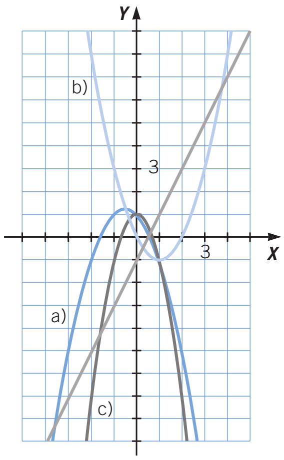
Los puntos de corte de la parábola y la recta son $(1, 2)$ y $(-1, 4)$.

057 **Calcula la intersección de la recta $y = 2x - 1$ y estas parábolas.**

a) $y = -x^2 - x + 1$

b) $y = x^2 - 2x$

c) $y = -2x^2 + 1$



a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = -x^2 - x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow 2x - 1 = -x^2 - x + 1 \rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = -4 + \sqrt{17} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = -4 - \sqrt{17} \end{cases}$$

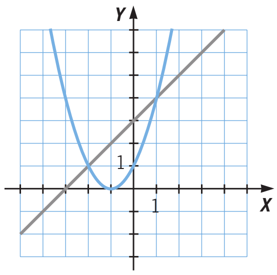
b) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \rightarrow 2x - 1 = x^2 - 2x \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \rightarrow y = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \dfrac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \rightarrow y = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

c) $\left.\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = -2x^2 + 1 \end{array}\right\} \rightarrow 2x - 1 = -2x^2 + 1 \rightarrow 2x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -2 + \sqrt{5} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = -2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

058 **Determina las ecuaciones de la recta y la parábola, y calcula sus puntos de intersección.**



Recta: $y = x + 4$

Parábola: $y = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Puntos de corte:

$\left.\begin{array}{l} y = x + 3 \\ y = x^2 + 2x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

059 **Halla la ecuación de una recta que corte a la parábola $y = -x^2 + 2$ en cada punto.**

a) (0, 2) **b) (1, 1)** **c) (2, −2)**

Además de este punto, ¿se cortan en algún otro punto? Calcúlalo.

Las rectas que pasan por un punto $P(a, b)$ son de la forma $y - b = m(x - a)$, con $m \in \mathbb{R}$, y dando distintos valores a m, obtenemos diferentes rectas que pasan por ese punto.

a) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (0, 2) son de la forma $y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y = mx + 2$, $(y = x + 2)$.

La recta $y = mx + 2$ corta a la parábola en dos puntos: (0, 2) y $(-m, -m^2 + 2)$. Para $m = 1 \rightarrow (-1, 1)$.

b) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (1, 1) son $y - 1 = m(x - 1) \rightarrow y = mx + (1 - m)$, $(y = x)$.

La recta $y = mx + (1 - m)$ corta a la parábola en dos puntos: (1, 1) y $(-m - 1, -m^2 - 2m + 1)$. Para $m = 1 \rightarrow (-2, -2)$.

c) Las rectas que cortan a la parábola $y = -x^2 + 2$ en el punto (2, −2) son $y + 2 = m(x - 2) \rightarrow y = mx - (2m + 2)$, $(y = x - 4)$.

La recta $y = mx - (2m + 2)$ corta a la parábola en dos puntos: (2, −2) y $(-m - 2, -m^2 - 4m - 2)$. Para $m = 1 \rightarrow (-3, -7)$.

060 **La siguiente tabla corresponde a una función de proporcionalidad inversa.**

x	1	2	3	4	5	...
y			$\frac{1}{4}$			

a) Completa la tabla.

b) Escribe la expresión algebraica de la función.

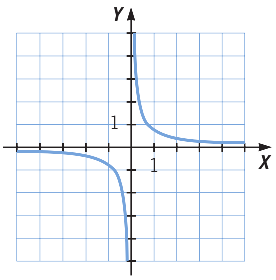
c) Representa la función.

a)

x	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	...

b) $y = \dfrac{\frac{3}{4}}{x}$

c)



061 **La relación entre dos números positivos viene establecida por la tabla.**

x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2	…
y	300	60	30	12	6	3	…

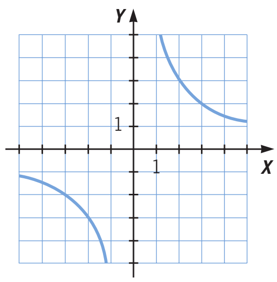
a) ¿Cuál es su expresión algebraica?

b) Represéntala gráficamente.

c) Da valores a *x* próximos a cero. ¿Qué ocurre con los valores de *y*?

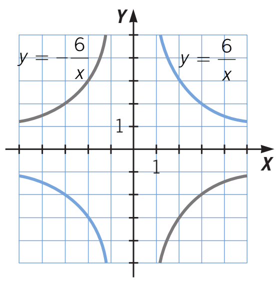
a) $xy = 6 \rightarrow y = \dfrac{6}{x}$

b)



c) Cuando *x* toma valores cercanos a cero, *y* toma valores muy elevados.

062 **Representa las funciones $y = \dfrac{6}{x}$ e $y = -\dfrac{6}{x}$, y escribe sus diferencias.**



Son funciones simétricas respecto del eje horizontal.

A cada valor de *x* le corresponden valores opuestos para *y*.

$y = \dfrac{6}{x}$ es decreciente y su representación está en los cuadrantes 1.° y 3.°.

$y = -\dfrac{6}{x}$ es creciente y su representación está en los cuadrantes 2.° y 4.°.

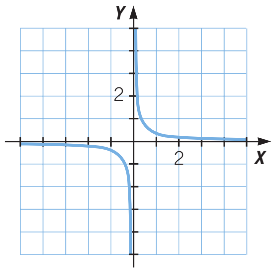
Funciones polinómicas y racionales

063 Estudia y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{1}{3x}$ **b)** $y = -\frac{1}{3x}$

a)

x	1	2	3	4	5	...
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{20}$	...



Dominio: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Recorrido: todos los números reales menos el 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

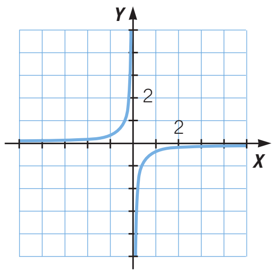
Crecimiento y decrecimiento: la función es decreciente.

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

b)

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$



Dominio: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Recorrido: todos los números reales menos 0: $\mathbb{R} - \{0\}$.

Continuidad: la gráfica es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$.

Crecimiento y decrecimiento: la función es creciente.

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Presenta una simetría respecto del origen de coordenadas.

064 Dada la función $y = -\frac{5}{x}$:

a) ¿Para qué valores es creciente la función?

b) ¿Tiene máximo o mínimo?

c) Haz una tabla de valores donde x tome valores de -1 a 0 y de 1 a 0 cercanos a 0. ¿A qué valores se acerca la función?

a) Es creciente en toda la recta real, menos en 0, donde no está definida.

b) No tiene máximos ni mínimos, por ser siempre creciente.

c)

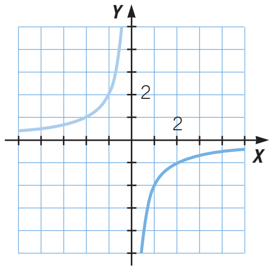
x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
y	5	50	500	5.000	50.000	-50.000	-5.000	-500	-50	-5

Cuando toma valores negativos próximos a 0 y valores positivos muy grandes, se acerca a infinito.

Cuando toma valores positivos próximos a 0 y valores negativos muy grandes, se acerca a menos infinito.

065 **Completa la gráfica correspondiente a una hipérbola.**

Como la gráfica de la hipérbola es simétrica respecto del origen de coordenadas, la otra rama pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(-1, 2)$.



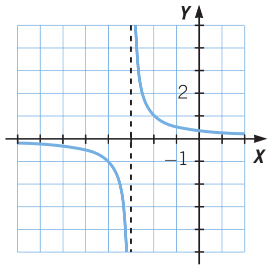
066 **Realiza la gráfica de las hipérbolas.**

a) $y = \dfrac{1}{x + 3}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 1}$

¿Cuáles son los ejes de cada una?

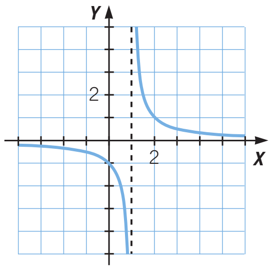
a) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.
Los ejes son $x = -3$ e $y = 0$.

x	-5	-4	-2	-1
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



b) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.
Los ejes son $x = 1$ e $y = 0$.

x	-1	0	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



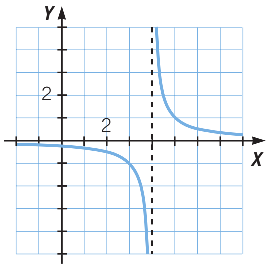
067 **Dibuja la gráfica de las hipérbolas.**

a) $y = \dfrac{1}{x - 4}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x - 4}$

¿Cuáles son los ejes de cada una?

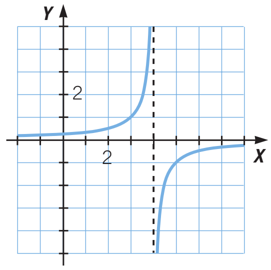
a) Como el numerador es positivo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°.
Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = 0$.

x	2	3	5	6
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



b) Como el numerador es negativo, la hipérbola ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°. Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = 0$.

x	2	3	5	6
y	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$



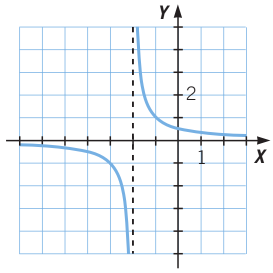
068 **Representa las hipérbolas.**

a) $y = \dfrac{1}{x+2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x+2} + 2$

b) $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x+2} + 2$

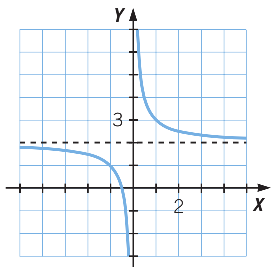
a) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 0$.

x	-4	-3	-1	0
y	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$



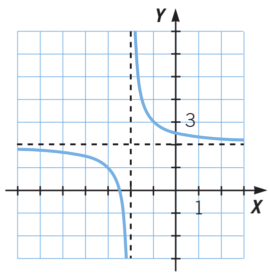
b) Los ejes son las rectas $x = 0$ e $y = 2$.

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$



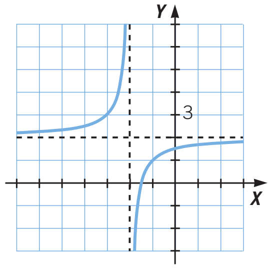
c) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 2$.

x	-4	-3	-1	0
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$

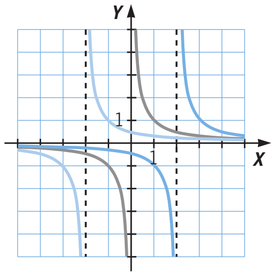


d) Los ejes son las rectas $x = -2$ e $y = 2$.

x	-4	-3	-1	0
y	$\frac{5}{2}$	1	3	$\frac{3}{2}$



069 **Conocida la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, representada en color azul, escribe la expresión algebraica de las hipérbolas de color rojo y verde.**



Roja: $y = \dfrac{1}{x - 2}$

Verde: $y = \dfrac{1}{x + 2}$

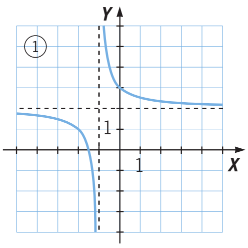
070 **Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.**

a) $y = \dfrac{1}{x + 1} + 2$ **c)** $y = \dfrac{1}{x - 2} - 4$

b) $y = \dfrac{-1}{x + 3}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x} + 2$

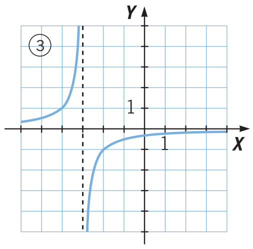
La gráfica ① ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°, por lo que el numerador será positivo.

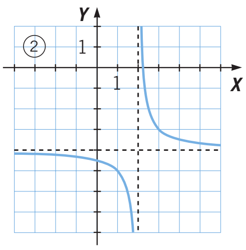
Los ejes son $x = -1$ e $y = 2$, luego su expresión es a).



La gráfica ② ocupa los cuadrantes 1.° y 3.°, luego el numerador es positivo.

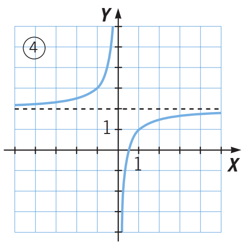
Los ejes son $x = 2$ e $y = -4$, y su expresión es c).





La gráfica ③ ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°, luego el numerador es negativo.

Los ejes son $x = -3$ e $y = 0$, y su expresión algebraica será b).



La gráfica ④ ocupa los cuadrantes 2.° y 4.°, y el numerador es negativo.

Los ejes son $x = 0$ e $y = 2$, y su expresión algebraica es d).

071 **Representa las siguientes hipérbolas.**

●●

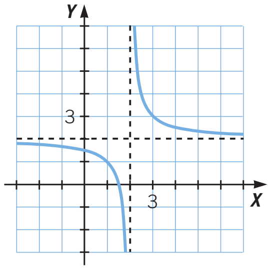
a) $y = \dfrac{1}{x-2} + 2$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x-1} + 4$

b) $y = \dfrac{1}{x-3} - 3$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-4} - 2$

a) La función es decreciente.

Los ejes son las rectas $x = 2$ e $y = 2$.

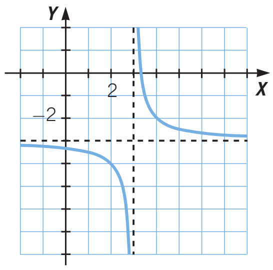
x	0	1	3	4
y	$\frac{3}{2}$	1	3	$\frac{5}{2}$



b) La función es decreciente.

Los ejes son las rectas $x = 3$ e $y = -3$.

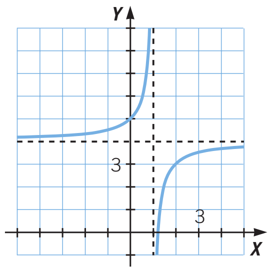
x	1	2	4	5
y	$-\frac{7}{2}$	-4	-2	$-\frac{5}{2}$



c) La función es creciente.

Los ejes son las rectas $x = 1$ e $y = 4$.

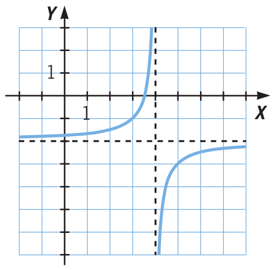
x	-1	0	2	3
y	$\frac{9}{2}$	5	3	$\frac{7}{2}$



d) La función es creciente.

Los ejes son las rectas $x = 4$ e $y = -2$.

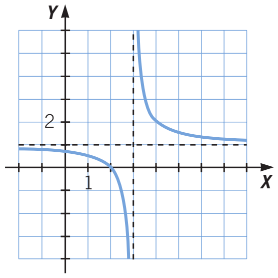
x	2	3	5	6
y	$-\frac{3}{2}$	-1	-3	$\frac{7}{2}$



072 **Dibuja una hipérbola que corte a los dos ejes de coordenadas, y escribe su expresión algebraica.**

Respuesta abierta.

$$y = \frac{1}{x-3} + 1$$



073 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REPRESENTAN LAS FUNCIONES DEL TIPO $y = \frac{x-a}{x-b}$?

Representa la función $y = \frac{x-3}{x-4}$.

PRIMERO.
Se dividen los polinomios.

$$\begin{array}{r|l} x-3 & x-4 \\ \hline -x+4 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \rightarrow y = \frac{x-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}$$

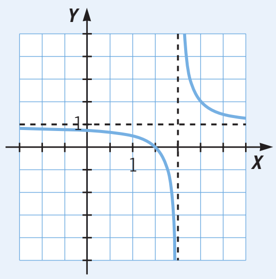
SEGUNDO. Se presenta la función racional del tipo $y = \frac{k}{x-a} + b$ que resulta.

La función $y = \frac{1}{x-4} + 1$ es una hipérbola semejante a la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, cuyos ejes son:

$x = 4 \rightarrow$ Eje vertical

$y = 1 \rightarrow$ Eje horizontal

La representación de la hipérbola es la siguiente.



Funciones polinómicas y racionales

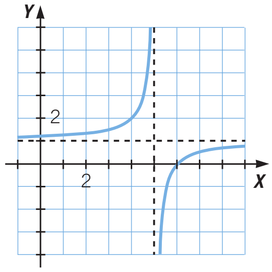
074 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{x - 6}{x - 5}$ **c)** $y = \dfrac{x + 2}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2}$ **d)** $y = \dfrac{2x - 15}{x - 7}$

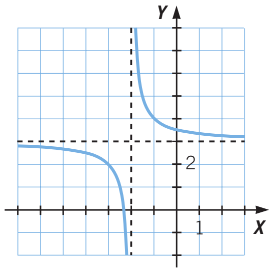
a) Hacemos la división: $y = \dfrac{x - 6}{x - 5} = 1 - \dfrac{1}{x - 5}$.

La función $y = 1 - \dfrac{1}{x - 5}$ es una hipérbola semejante a $y = -\dfrac{1}{x}$. Los nuevos ejes. de esta hipérbola son: $x = 5$ e $y = 1$.



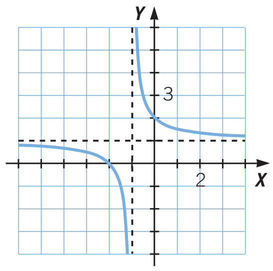
b) Hacemos la división: $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2} = 3 + \dfrac{1}{x + 2}$.

La función $y = 3 + \dfrac{1}{x + 2}$ es una hipérbola semejante a $y = \dfrac{1}{x}$. Los nuevos ejes. de esta hipérbola son: $x = -2$ e $y = 3$.



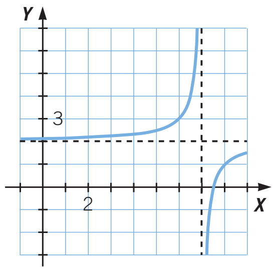
c) Hacemos la división: $y = \dfrac{x + 2}{x + 1} = 1 + \dfrac{1}{x + 1}$.

La función $y = 1 + \dfrac{1}{x + 1}$ es una hipérbola semejante a $y = \dfrac{1}{x}$. Los nuevos ejes. de esta hipérbola son: $x = -1$ e $y = 1$.



d) Hacemos la división: $y = \dfrac{2x - 15}{x - 7} = 2 - \dfrac{1}{x - 7}$.

La función $y = 2 - \dfrac{1}{x - 7}$ es una hipérbola semejante a $y = -\dfrac{1}{x}$. Los nuevos ejes. de esta hipérbola son: $x = 7$ e $y = 2$.



075 **A nivel del mar, el agua hierve a 100 °C, pero cada incremento de 100 m en la altitud supone una décima de grado menos para hervir.**

a) Calcula el punto de ebullición en las cimas del Aneto (3.404 m) y del Everest (8.844 m).

b) Indica la expresión algebraica de la función *Temperatura de ebullición del agua—Altitud.*

a) $T_{Aneto} = 100 - \dfrac{3.404}{100} \cdot 0{,}1 = 96{,}596$ °C

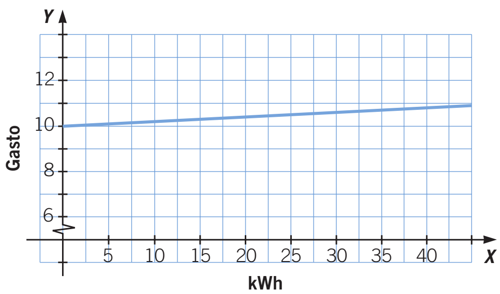
$T_{Everest} = 100 - \dfrac{8.844}{100} \cdot 0{,}1 = 91{,}156$ °C

b) Temperatura: y Altura: x

$y = 100 - 0{,}1 \cdot \dfrac{x}{100} \rightarrow y = 100 - \dfrac{x}{1.000}$

076 **El coste fijo de la factura mensual de electricidad es de 10 €. Además, cada kilowatio cuesta 0,02 €. Haz una tabla que relacione el gasto mensual, en kWh, y el importe, en €. Escribe la función y represéntala.**

kWh	Gasto
0	10
10	10,2
20	10,4
30	10,6
40	10,8
50	11



Gasto: y kWh: x

$y = 10 + 0{,}02x$

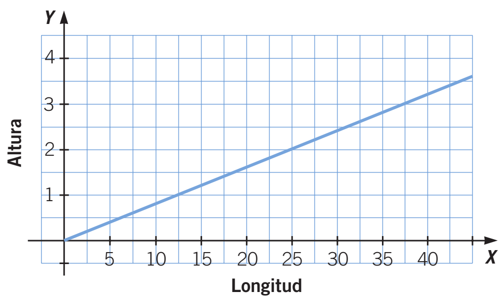
077 **La relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada al subir un puerto de montaña se determina por la señal de tráfico que informa de la pendiente.**

Si en un puerto de montaña la pendiente es del 8 %, expresa la relación entre la longitud recorrida y la altura alcanzada de forma algebraica, y representa la función.

Altura: y

Longitud: x

$y = 0{,}08x$



Funciones polinómicas y racionales

078 **Los taxis de una ciudad cobran 1 € por bajada de bandera y 0,80 € por cada kilómetro recorrido.**

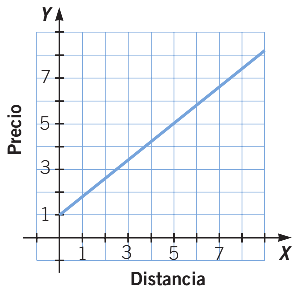
a) Haz una tabla que exprese el precio del viaje en función de los kilómetros recorridos.

b) Escribe la función que relaciona ambas magnitudes y represéntala.

a)

x	y
0	1
1	1,8
2	2,6
3	3,4
4	4,2
5	5
6	5,8
7	6,6
8	7,4
9	8,2
10	9

b) $y = 1 + 0{,}8x$



079 **Existen varias escalas numéricas para medir la temperatura. Escribe una expresión algebraica que transforme:**

a) Grados Celsius a grados Kelvin.

b) Grados Celsius a grados Farenheit.

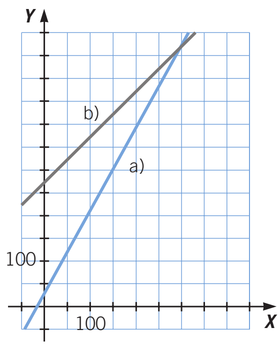
Representa ambas funciones y determina la temperatura a la que coinciden ambas escalas.

	Agua	
Escalas	$P_{\text{fusión}}$	$P_{\text{ebullición}}$
Celsius	0	100
Farenheit	32	212
Kelvin	273,15	373,15

a) $y = 32 + \dfrac{180}{100}x$

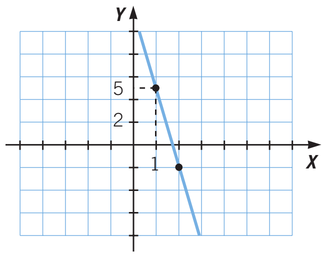
b) $y = 273{,}15 + x$

$$\left.\begin{array}{l} y = 32 + \dfrac{180}{100}x \\ y = 273{,}15 + x \end{array}\right\}$$
$$\rightarrow 32 + \frac{180}{100}x = 273{,}15 + x$$
$$\rightarrow x = 301{,}39375\ °\text{C} \rightarrow y = 574{,}54375$$



Las escalas Kelvin y Farenheit coinciden en 574,54375 °F = 574,54375 °K.

080 La gráfica refleja la temperatura del aire, en °C, en función de los kilómetros de altitud.



a) **Escribe la expresión algebraica de la función *Altitud—Temperatura*.**

b) **¿Cuál es su ordenada en el origen? ¿Qué significado tiene?**

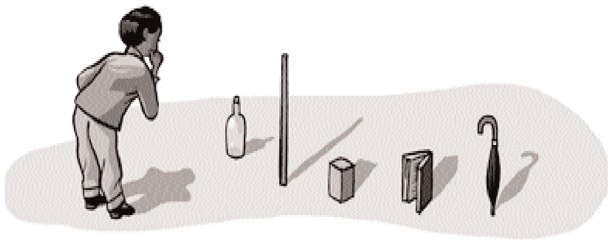
c) **¿Qué temperatura habrá a 9 km de altitud?**

a) La función es $y = -6x + 11$.

b) La ordenada en el origen es 11, y esto significa que, a nivel de mar, la temperatura es de 11°C.

c) A 9 km de altura habrá: $11 - 6 \cdot 9 = -43$ °C.

081 **En un momento del día, la sombra de un palo de 1 m de altura es de 0,3 m.**



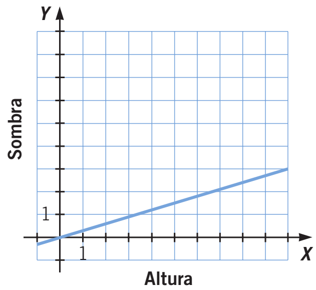
a) **Haz una tabla donde se refleje la longitud de la sombra de varios objetos, en función de su altura, para ese instante.**

b) **Escribe la función y represéntala.**

a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9	1,05	1,2	1,35	1,5

b) $y = 0,3x$



082 Queremos construir un depósito prismático de base rectangular, 2 metros de altura y cuya capacidad sea 500 litros.

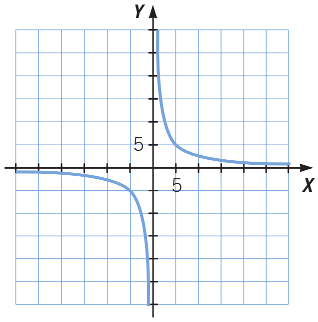
a) Haz una tabla con los diferentes valores de las dimensiones que puede tener.

b) Escribe la función correspondiente y represéntala.

a)

Base	1	5	10	20	25
Altura	25	5	2,5	1,25	1

b) $y = \dfrac{25}{x}$



Realmente la representación corresponde a la parte del 1.er cuadrante, ya que la longitud de la base del rectángulo nunca puede ser negativa.

083 Los alumnos de 4.º ESO quieren ir de viaje de estudios. Para obtener fondos compran 360 cajas de polvorones que han de vender entre todos los alumnos.

a) Haz una tabla que relacione el número de alumnos que van a viajar con el número de cajas que ha de vender cada uno.

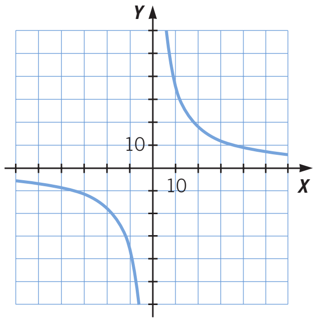
b) Escribe su expresión algebraica y representa la función.

c) Comprueba que el producto del número de alumnos y el de cajas es constante. ¿Cuál es ese valor?

a)

N.º de alumnos	1	10	20	60	120	360
Cajas	360	36	18	6	3	1

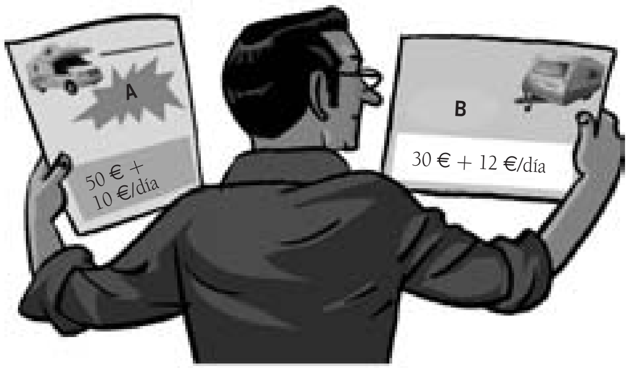
b) $y = \dfrac{360}{x}$



Realmente la representación corresponde a la parte del 1.er cuadrante, ya que el número de alumnos nunca puede ser negativo.

c) El producto siempre vale 360.

084 **Carlos se va de vacaciones y quiere alquilar una caravana. Por ello, acude a dos empresas de alquiler de caravanas que le ofrecen diferentes posibilidades.**



a) Si Carlos va a viajar 8 días con la caravana, ¿en qué empresa le resulta más barato hacerlo?

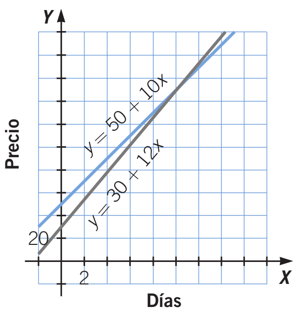
b) ¿Y si va a viajar 15 días?

c) Escribe las funciones *Precio—Tiempo* y represéntalas en los mismos ejes. ¿Dónde se cortan? ¿Qué representa el punto de corte?

a) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 8 = 130$ €
Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 8 = 126$ €
Le resulta más barato hacerlo en la compañía B.

b) Precio en la compañía A: $50 + 10 \cdot 15 = 200$ €
Precio en la compañía B: $30 + 12 \cdot 15 = 210$ €
Le resulta más barato hacerlo en la compañía A.

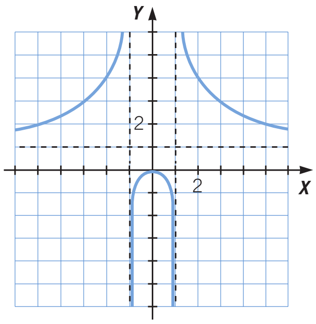
c) Función de la compañía A: $y = 50 + 10x$
Función de la compañía B: $y = 30 + 12x$



Las funciones se cortan en el punto (10, 150), y esto significa que el precio de las dos compañías coincide para un alquiler de 10 días, y sería de 150 €.

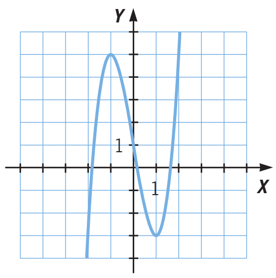
085 **Haz la gráfica de $f(x)$ que cumpla que:**

- **Es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = -1$ y en $x = 1$.**
- **Es creciente en $x < 0$ y es decreciente en $x > 0$.**
- **Tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.**
- **Tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$.**
- **Tiene dos asíntotas verticales, una en $x = -1$ y otra en $x = 1$.**
- **Pasa por el origen y por el punto (2, 4).**



086 **A partir de la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ razona cuántas soluciones tienen estas ecuaciones.**

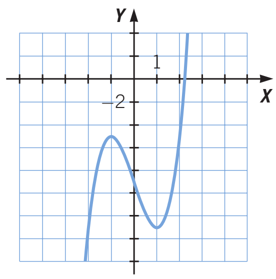
a) $2x^3 - 6x + 1 = 10$
b) $2x^3 - 6x + 1 = 2$
c) $2x^3 - 6x + 1 = -3$



Las soluciones de las ecuaciones coinciden con los cortes de las funciones con el eje *X*, y la representación de cada función se consigue trasladando la gráfica de la función .

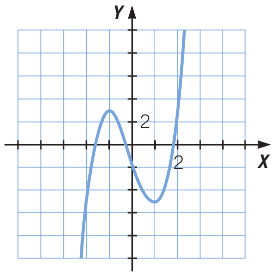
a) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 9$ se realiza desplazando diez unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

La ecuación solo tiene una raíz y está en el intervalo (2, 3).



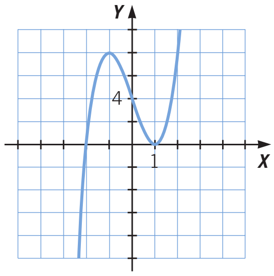
b) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x - 2$ se realiza desplazando dos unidades hacia abajo la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$

La ecuación tiene tres soluciones, en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ y $(1, 2)$



c) La gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 4$ se realiza desplazando tres unidades hacia arriba la gráfica de $y = 2x^3 - 6x + 1$.

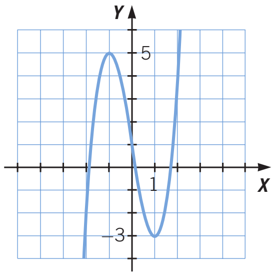
La ecuación tiene tres soluciones, una solución doble en $x = 1$ y otra en $x = -2$.



087 **¿Para qué valores del parámetro *a* tiene 3 soluciones la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = a$? ¿Y para qué valores tiene 4 o más soluciones?**

Tiene tres soluciones para todos los valores comprendidos entre el máximo relativo ($y = 5$) y el mínimo relativo ($y = -3$).

Nunca puede tener más de tres soluciones por ser una ecuaciones de grado 3. Tiene tres soluciones para cualquier valor *a* del intervalo $(-3, 5)$.



088 **De una función polinómica sabemos que:**

$f(0) = 3$ $\quad f(1) = 2$ $\quad f(-1) = 8$

a) ¿Cuántas funciones polinómicas de grado 2 cumplen estas condiciones?

b) ¿Y cuántas de grado superior a 2?

a) Una ecuación de grado 2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, por lo que sustituyendo resulta el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que tiene una sola solución.

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 3 \rightarrow C = 3 \\ f(1) = 2 \rightarrow A + B + C = 2 \\ f(-1) = 8 \rightarrow A - B + C = 8 \end{array}\right\} \rightarrow A = 2, B = -3, C = 3$$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

b) Para ecuaciones de grado mayor que 2 se obtienen sistemas con tres ecuaciones y, al menos, con cuatro incógnitas, por lo que habrá infinitas soluciones.

Funciones polinómicas y racionales

EN LA VIDA COTIDIANA

089 **Los alumnos de 4.º ESO están organizando su viaje de fin de curso y acuden a distintas agencias de viajes para tener varios presupuestos de las ciudades que podrían visitar.**

En una de las agencias les sugieren viajar a Francia durante 11 días. Tienen una oferta que ya habían visto en el escaparate, y la directora de la agencia les ofrece una promoción especial, dependiendo del número de alumnos que contraten el viaje.

Cuando vuelven al centro escolar para contárselo al resto de alumnos, todos tienen claro que les conviene ser el mayor número de alumnos posible.

¿Qué número de alumnos le interesa a la agencia que contrate el viaje?

Número de alumnos: x

Precio de cada alumno:

$$\begin{cases} 400 - 10 \cdot (x - 32) = 720 - 10x & \text{si } x > 32 \\ 400 & \text{si } x \le 32 \end{cases}$$

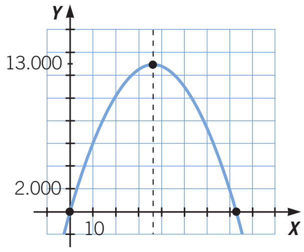
Gasto a partir de 32 alumnos:

$$y = x \cdot (720 - 10x)$$

A la agencia le interesa que se realice el mayor gasto posible, y que se corresponde con el vértice de la función. El vértice está en el eje que pasa por el punto medio de los dos puntos de corte con el eje X.

$$x \cdot (720 - 10x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 72 \end{cases}$$

El eje es: $x = \dfrac{72}{2} = 36$



A la agencia le interesa que vayan 36 alumnos.

090 **Un estanque ha sido contaminado con un residuo orgánico, y el equipo de biólogos encargado de estudiar la gravedad de la situación va a realizar un estudio en el que se analice el impacto ambiental que puede tener.**

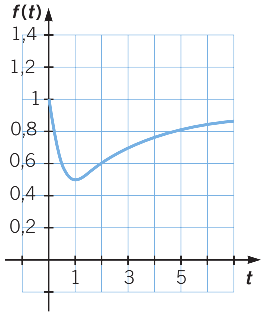
Funciones polinómicas y racionales

Para sacar conclusiones, el equipo va a medir el nivel de concentración de oxígeno en el estanque.

La relación entre las dos magnitudes que van a estudiar viene dada por la función:

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

donde t representa el tiempo en semanas y $t \geq 0$.



a) Si una semana aparecieron bastantes peces muertos, ¿cuál crees que fue?

b) Según va transcurriendo el tiempo, ¿hacia qué valor tiende la concentración?

a) La semana en que aparecen más peces muertos es cuando la concentración de oxígeno es menor, y eso ocurre en las dos primeras semanas, especialmente de la mitad de la primera semana a la mitad de la segunda.

b) Si hacemos una tabla de valores sobre la evolución de la concentración de oxígeno, se observa que la concentración tiende al valor 1 con el paso del tiempo.

t	*f*(*t*)
1	0,5
6	0,8378
11	0,9098
16	0,9377
21	0,9525
26	0,9616
31	0,9678
36	0,9722
41	0,9756
46	0,9783
51	0,9804
56	0,9821
61	0,9836
66	0,9849
71	0,9859
76	0,9868
81	0,9877
86	0,9884
91	0,989
96	0,9896
101	0,9901