14 Distribuciones discretas. La distribución binomial

ACTIVIDADES INICIALES

14.I. Lanza un dado 50 veces, anotando los resultados de la cara superior, y representa los resultados obtenidos en un diagrama de barras. Calcula la media y la varianza.

Respuesta libre.

14.II. Repite el experimento anterior, pero lanzando esta vez el dado 100 veces, y calcula la media y la varianza de la distribución de las frecuencias anotadas.

Respuesta libre.

EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1. Pon dos ejemplos de variables aleatorias discretas y de otras dos continuas, indicando su recorrido.

Variables discretas:

- Terminación de los décimos de lotería comprados por los 10 primeros clientes en una administración de lotería. Los posibles resultados son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
- Número de preguntas que se hacen en los exámenes finales de junio de las distintas materias de 1.º de Bachillerato. Los resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5, 6…

Variables continuas:

- Longitud de los espárragos de una plantación. El recorrido de los datos puede ser de 6 cm hasta 22 cm.
- Cantidad de agua consumida mensualmente por 10 familias.

14.2. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la siguiente tabla.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,15	0,2	k	0,3	0,11

a) Halla el valor de k.

b) Calcula $P(X < 3)$ y $P(1 < X \leq 4)$.

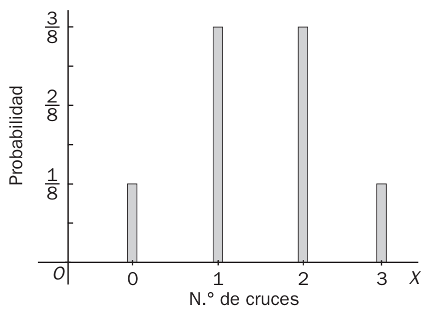
a) $\sum p_i = 1$; $\quad 0{,}15 + 0{,}2 + k + 0{,}3 + 0{,}11 = 1 \Rightarrow k = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$

b) $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$

$P(1 < X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2 + 0{,}24 + 0{,}3 = 0{,}74$

14.3. Se lanza una moneda tres veces y se define la variable aleatoria X como el número de cruces obtenido. Halla la función de probabilidad y su representación gráfica.

Espacio muestral	x_i	p_i
CCC	0	$\frac{1}{8}$
CCX CXC XCC	1	$\frac{3}{8}$
CXX XCX XXC	2	$\frac{3}{8}$
XXX	3	$\frac{1}{8}$



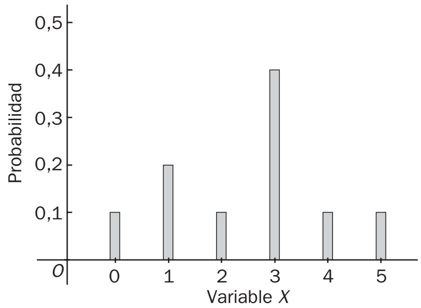
14.4. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,1	0,4	0,1	0,1

a) Representa gráficamente la función de probabilidad.

b) Calcula $P(X < 4{,}5)$, $P(X \geq 3)$ y $P(3 \leq X < 4{,}5)$.

a)



b) $P(X < 4{,}5) = 1 - P(X \geq 4{,}5) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$
$= 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

$P(3 \leq X < 4{,}5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

14.5. Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Se considera la variable aleatoria X, que asigna a cada elemento del espacio muestral la diferencia positiva de las caras obtenidas.

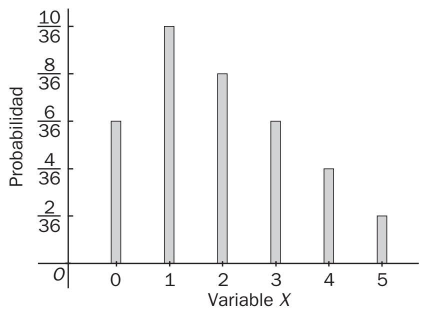
a) Representa la función de probabilidad.

b) Halla la media, la varianza y la desviación típica.

c) Calcula $P(x \leq 3)$.

a) Construimos la siguiente tabla para poder describir el recorrido de la variable y la función de probabilidad.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0



Función de probabilidad

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

b) Formamos la siguiente tabla:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	$\frac{6}{36}$	0	0
1	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{8}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{32}{36}$
3	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{54}{36}$
4	$\frac{4}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{64}{36}$
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{50}{36}$
	1	$\frac{70}{36}$	$\frac{210}{36}$

Media: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \frac{70}{36} = 1{,}94$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = \frac{210}{36} - 1{,}94^2 = 2{,}07$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{2{,}07} = 1{,}44$

c) $P(x \leq 3) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$

14.6. Las caras de un dado trucado tienen las siguientes probabilidades:

$P(1) = 0{,}2 \qquad P(2) = 0{,}15 \qquad P(3) = 0{,}15 \qquad P(4) = 0{,}15 \qquad P(5) = 0{,}1 \qquad P(6) = 0{,}25$

Halla la media y la desviación típica.

$\mu = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}25 = 3{,}55$

$\sigma^2 = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}15 + 9 \cdot 0{,}15 + 16 \cdot 0{,}15 + 25 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}25 - 3{,}55^2 = 12{,}5 \quad \sigma = \sqrt{3{,}447} = 1{,}856$

14.7. En media, 45 personas utilizan un cajero automático antes de las 12.00, con una desviación típica de 2,3, y el número medio de clientes que lo utilizan por la tarde es de 64, con desviación típica de 1,2. Halla el número medio y la desviación típica del número de personas que utilizan el cajero al cabo del día.

Si X es el número de personas que utilizan el cajero por la mañana e Y es el número de las que lo utilizan por la tarde, se tiene por la propiedad de la suma de las medias y de las desviaciones típicas:

$\mu_{X+Y} = \mu_X + \mu_Y = 45 + 64 = 109$ personas $\qquad \sigma_{X+Y} = \sqrt{2{,}3^2 + 1{,}2^2} = \sqrt{6{,}73} = 2{,}59$

14.8. En una rifa organizada por una asociación benéfica se sortea un lote de libros valorados en 100 euros. Los números están numerados desde el 0 hasta el 999. El ganador es el poseedor del número que coincida con las tres últimas cifras del gordo de Navidad.

a) ¿Cuál es el valor económico esperado de cada billete de la rifa?

b) ¿Qué precio debería ponerse a cada número para que la contribución esperada de cada comprador a la asociación fuese de 1 euro?

a) Se llama X a la variable aleatoria *premio ganado con el billete.* Su función de probabilidad será:

x_i	0	1
p_i	$\frac{999}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

$\mu = 0 \cdot 0{,}999 + 100 \cdot 0{,}001 = 0{,}1$ €

b) La contribución C de cada comprador será el precio p del billete menos el premio que corresponda al billete, es decir, C es una variable aleatoria que puede escribirse como $C = p - X$. Así:

$$\mu_C = p - \mu_X \Rightarrow p = \mu_C + \mu_X = 1 + 0{,}1 = 1{,}1 \text{ €}$$

14.9. Un jugador lanza tres monedas. Gana tantos euros como caras obtenidas excepto cuando aparecen tres cruces, que pierde 10 euros. Si X es la variable aleatoria que indica la ganancia, calcula:

a) El conjunto de valores de la variable aleatoria X.

b) La función de probabilidad de la variable X.

c) La media de la distribución y su desviación típica.

d) ¿Es favorable el juego al jugador?

a) La variable X toma los valores -10, 1, 2, 3.

b)

Espacio muestral	x_i	p_i
CCC	3	$\frac{1}{8}$
CCX CXC XCC	2	$\frac{3}{8}$
CXX XCX XXC	1	$\frac{3}{8}$
XXX	-10	$\frac{1}{8}$

c) $\mu = 3 \cdot 0{,}125 + 2 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}375 - 10 \cdot 0{,}125 = 0{,}25$ euros

$\sigma^2 = 9 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}375 + 100 \cdot 0{,}125 - 0{,}25^2 =$
$= 15{,}4375$

$\sigma = \sqrt{15{,}4375} = 3{,}93$

d) Sí es favorable, pues la media es 0,25 euros.

14.10. Calcula el valor de x en los siguientes casos.

a) $\binom{x+1}{7} + \binom{x+1}{6} = \binom{11}{7}$

b $\binom{11}{x-2} + \binom{11}{x-1} = \binom{12}{9}$

a) $\binom{x+2}{7} = \binom{11}{7} \Rightarrow x + 2 = 11 \Rightarrow x = 9$

b) $\binom{12}{x-1} = \binom{12}{9} \Rightarrow x - 1 = 9 \quad \Rightarrow x = 10$

14.11. Escribe el desarrollo completo de:

a) $(1 + 2x)^4$

b) $(1 - 2x)^4$

c) $(3x - 2)^5$

d) $(x + 3y)^5$

a) $(1 + 2x)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3(2x)^1 + \binom{4}{2}1^2(2x)^2 + \binom{4}{3}1(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4 =$

$= 1 + \frac{4!}{3!1!}2x + \frac{4!}{2!2!}4x^2 + \frac{4!}{1!3!}8x^3 + 16x^4 =$

$= 1 + 4 \cdot 2x + 6 \cdot 4 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 8x^3 + 16x^4 = 1 + 8x + 24x^2 + 32x^3 + 16x^4$

b) $(1 - 2x)^4 = \binom{4}{0}1^4 - \binom{4}{1}1^3(2x)^1 + \binom{4}{2}1^2(2x)^2 - \binom{4}{3}1(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4 =$

$= 1 - \frac{4!}{3!1!}2x + \frac{4!}{2!2!}4x^2 - \frac{4!}{1!3!}8x^3 + 16x^4 =$

$= 1 - 4 \cdot 2x + 6 \cdot 4 \cdot 4x^2 - 4 \cdot 8x^3 + 16x^4 = 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$

c) $(3x - 2)^5 = \binom{5}{0}(3x)^5 - \binom{5}{1}(3x)^4 2 + \binom{5}{2}(3x)^3 2^2 - \binom{5}{3}(3x)^2 2^3 + \binom{5}{4}(3x)2^4 - \binom{5}{5}2^5 =$

$= 243x^5 - \frac{5!}{4!1!}162x^4 + \frac{5!}{3!2!}108x^3 - \frac{5!}{2!3!}72x^2 + \frac{5!}{1!4!}48x - 2^5 =$

$= 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32$

d) $(x + 3y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 3y + \binom{5}{2}x^3(3y)^2 + \binom{5}{3}x^2(3y)^3 + \binom{5}{4}x(3y)^4 - \binom{5}{5}(3y)^5 =$

$= x^5 + \frac{5!}{4!1!}3x^4y + \frac{5!}{3!2!}9x^3y^2 + \frac{5!}{2!3!}27x^2y^3 + \frac{5!}{1!4!}81xy^4 + 243y^5 =$

$= x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$

14.12. ¿Cuál es el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2)^6$?

$\binom{6}{4}1(x^2)^4 = 15x^8$

14.13. El director de *marketing* de un equipo de baloncesto ha calculado que el porcentaje de seguidores en una ciudad es del 35%. Se escoge al azar una muestra formada por 10 personas y se considera la variable que expresa el número de seguidores en la muestra.

a) Estudia si la variable sigue una distribución binomial.

b) En caso afirmativo, señala los parámetros de la distribución.

a) 1.° En cada prueba solo son posibles dos resultados:

A = "aficionado" y $\overline{A}$ = "no aficionado"

2.° El resultado obtenido de la pregunta "es seguidor o no" en cada individuo de la muestra es independiente de los otros.

3.° La probabilidad del suceso A, $p = P(A) = 0{,}35$, es constante.

b) Los valores $n = 10$ y $p = 0{,}35$ son los parámetros de la distribución, que representaremos por $B(10;\ 0{,}35)$.

14.14. Un estudio sobre la población activa de una ciudad revela que 4 de cada 15 trabajadores utiliza el metro. Se escoge al azar una muestra formada por 30 trabajadores y se considera la variable que expresa el número de usuarios de metro en la muestra.

a) Determina si la variable sigue una distribución binomial.

b) En caso afirmativo, halla los parámetros de la distribución.

a) 1.º En cada prueba solo son posibles dos resultados:
A = "utiliza el metro" y $\overline{A}$ = "no utiliza el metro"

2.º El resultado obtenido de la pregunta "utiliza el metro o no" en cada individuo de la muestra es independiente de los otros.

3.º La probabilidad del suceso A, $p = P(A) = \frac{4}{15}$, es constante.

b) Los valores $n = 30$ y $p = \frac{4}{15}$ son los parámetros de la distribución, que representaremos por $B\left(30; \frac{4}{15}\right)$.

14.15. (PAU) El 30% de los tornillos de una gran partida son defectuosos. Si se cogen tres tornillos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Los tres sean defectuosos.

b) Solamente dos sean defectuosos.

c) Ninguno de ellos sea defectuoso.

Sea X la variable que representa el número de tornillos defectuosos. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0{,}3$; es decir, $B(3; 0{,}3)$.

a) $P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027$

b) $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$

c) $P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}7^3 = 0{,}343$

14.16. (PAU) En un grupo de 16 personas, 10 son varones, y 6, mujeres. Se eligen al azar 3 personas del grupo. Calcula la probabilidad de:

a) Seleccionar exactamente dos varones.

b) Seleccionar al menos un varón.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de varones. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = \frac{10}{16} = 0{,}625$, es decir, $B(3; 0{,}625)$.

a) $P(X = 2) = \binom{3}{2}(0{,}625)^2(1 - 0{,}625)^1 = 3 \cdot 0{,}390625 \cdot 0{,}375 = 0{,}4394529 \approx 0{,}44$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0}(0{,}625)^0(0{,}375)^3 = 1 - 0{,}0527343 = 0{,}9472657 \approx 0{,}95$

14.17. (PAU) La opinión que tiene la población sobre la gestión de su Ayuntamiento es favorable en el 30% de los casos, y desfavorable en el resto. Elegidas 10 personas al azar, halla la probabilidad de que:

a) Exactamente tres la consideren favorable.

b) Ninguno la considere desfavorable.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de personas de la población favorables a la gestión del Ayuntamiento. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}3$; es decir, $B(10; 0{,}3)$.

a) $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^7 = 0{,}267$

b) Si ninguno lo considera desfavorable, es que los 10 lo consideran favorable.

$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0{,}3^{10} = 0{,}000006$

14.18. (PAU) Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40% asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. Calcula la probabilidad de que:

a) Solo tres acudan al acto.

b) Acudan más de tres.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de personas que asisten al acto. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}4$; es decir, $B(10;\ 0{,}4)$.

a) Utilizando la tabla de la binomial se obtiene $P(X = 3) = 0{,}1665$.

b) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) =$
$= 1 - 0{,}0025 - 0{,}0207 - 0{,}0763 - 0{,}1665 = 1 - 0{,}266 = 0{,}734$

14.19. En una ciudad se sabe que la probabilidad de padecer la gripe en el mes de enero es de $\frac{1}{5}$. Se escoge una muestra al azar formada por 30 personas. Se pide:

a) Esperanza matemática y su interpretación.

b) Varianza.

Sea X la variable que expresa el número de personas que padecen gripe. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 30$ y $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$; es decir, $B(30;\ 0{,}2)$.

a) Esperanza matemática o media: $\mu = 30 \cdot 0{,}2 = 6$ personas

b) Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 30 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4{,}8$

14.20. En la especie ovina, el color de lana blanco domina sobre el negro. Por ello, al cruzar una oveja de lana blanca con un carnero de lana negra, la probabilidad de que la descendencia sea blanca es de 0,75. Si se realizan 8 cruzamientos de este tipo, ¿cuál es el número medio de corderos blancos esperado?

Sea X la variable que expresa el número de descendientes de la blanca. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}75$; es decir, $B(8;\ 0{,}75)$.

El número medio de descendientes de lana blanca es: $\mu = 8 \cdot 0{,}75 = 6$.

14.21. Si se auditan 12 empresas y la probabilidad de que una de ellas esté en quiebra es de 0,15, ¿cuál es el número esperado de empresas en quiebra? ¿Y su desviación típica?

Sea X la variable que indica el número de empresas en quiebra. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 12$ y $p = 0{,}15$; es decir, $B(12;\ 0{,}15)$.

El número esperado de empresas en quiebra es: $\mu = 12 \cdot 0{,}15 = 1{,}8$.

La desviación típica del número de empresas en quiebra es: $\sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} = \sqrt{1{,}53} = 1{,}24$.

14.22. Una determinada marca de CD ha detectado en su departamento de control de calidad que son defectuosos el 5%. En una muestra formada por 25 CD se pide:

a) Probabilidad de que no haya ninguno defectuoso.

b) La media y la desviación típica de esta distribución.

Sea X la variable que expresa el número de CD no defectuosos. Se trata de una variable binomial de parámetros $n = 25$ y $p = 0{,}95$, sigue una distribución $B(25;\ 0{,}95)$.

a) $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0{,}95^{25} = 0{,}2774$

b) Media: $\mu = 25 \cdot 0{,}95 = 23{,}75$
Varianza: $\sigma^2 = 25 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 1{,}1875$ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{1{,}1875} = 1{,}0897$

14.23. A 200 alumnos de 1.º de ESO se les hace una prueba de nivel de ortografía consistente en deletrear tres palabras. Los datos obtenidos están en la tabla derecha.

a) Ajusta razonadamente esta distribución a una binomial.

b) Compara la distribución de frecuencias observada con la obtenida en el ajuste.

N.º de errores	N.º de alumnos
0	65
1	78
2	43
3	14

a) La prueba de un alumno puede considerarse como un experimento aleatorio compuesto por tres repeticiones de la misma prueba: "deletrear una palabra".

– En cada palabra solo pueden ocurrir dos sucesos: el alumno la deletrea correctamente o no.

– La respuesta de cada palabra es independiente de la anterior.

– La probabilidad de deletrear correctamente es constante en cada pregunta.

Por tanto, esta distribución empírica se puede ajustar mediante una distribución binomial $B(3, p)$.

Para calcular el parámetro p hay que hallar en primer lugar la media de la distribución empírica:

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 78 + 2 \cdot 43 + 3 \cdot 14}{200} = 1{,}03$$

Como $\mu = n \cdot p = 3 \cdot p = 1{,}03$, se tiene que:

$$p = \frac{1{,}03}{3} = 0{,}343$$

Por tanto, la variable X que expresa el número de palabras deletreadas incorrectamente por un alumno es una binomial $B(3;\ 0{,}343)$.

b) Para hallar las frecuencias teóricas se calculan las probabilidades $P(X = k)$ para $k = 0, 1, 2, 3$. Después se multiplica por 200.

Probabilidades	Frecuencias teóricas
$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}343^0 \cdot 0{,}657^3 = 0{,}28359;$	$200 \cdot 0{,}28359 = 57$
$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}343^1 \cdot 0{,}657^2 = 0{,}44417;$	$200 \cdot 0{,}44417 = 89$
$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}343^2 \cdot 0{,}657^1 = 0{,}23189;$	$200 \cdot 0{,}23189 = 46$
$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}343^3 \cdot 0{,}657^0 = 0{,}04035;$	$200 \cdot 0{,}04035 = 8$

Para comparar las dos distribuciones, lo más sencillo es organizar los datos en una tabla.

N.º de errores	0	1	2	3
N.º de alumnos	65	78	43	14
N.º de errores esperados	57	89	46	8

EJERCICIOS

Distribuciones discretas

14.24. (PAU) Halla la media y la varianza de una variable X que tiene la siguiente función de probabilidad:

X	2	3	7
P	0,2	0,3	0,5

$\mu = 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}5 = 4{,}8$ $\sigma^2 = 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 + 49 \cdot 0{,}5 - 4{,}8^2 = 4{,}96$

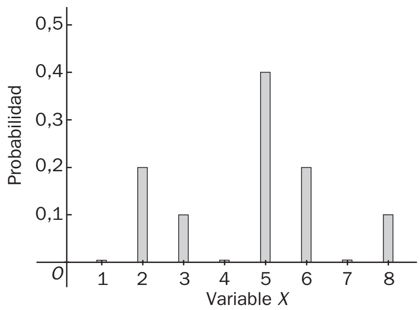
14.25. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente función de probabilidad.

X	2	3	5	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

a) Representa en un diagrama la función de probabilidad.

b) Halla la media y la desviación típica

a)



x_i	p_i	x_ip_i	$x_i^2p_i$
2	0,2	0,4	0,8
3	0,1	0,3	0,9
5	0,4	2	10
6	0,2	1,2	7,2
8	0,1	0,8	6,4
		4,7	25,3

Media: $\mu = 4{,}7$

Varianza: $\sigma^2 = 25{,}3 - 4{,}7^2 = 3{,}21$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{3{,}21} = 1{,}79$

14.26. Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad viene dada por la siguiente tabla.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,3	0,1	0,15	0,05	0,2	0,1	0,1

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Halla la esperanza matemática.

c) Halla la varianza y la desviación típica.

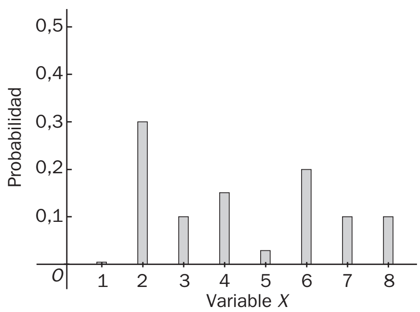
d) Halla las siguientes probabilidades.

$P(X < 2)$ $P(X \leq 2)$ $P(3 < X \leq 5)$ $P(X < 11)$.

e) Halla la probabilidad de que a lo sumo X tome el valor 4.

f) Halla la probabilidad de que al menos X tome el valor 6.

a)



x_i	p_i	x_ip_i	$x_i^2p_i$
2	0,3	0,6	1,2
3	0,1	0,3	0,9
4	0,15	0,6	2,4
5	0,05	0,25	1,25
6	0,2	1,2	7,20
7	0,1	0,7	4,9
8	0,1	0,8	6,4
	1	4,45	24,25

b) $\mu = 4{,}45$

c) $\sigma^2 = 24{,}25 - 4{,}45^2 = 4{,}4475$

$\sigma = \sqrt{4{,}4475} = 2{,}1089$

d) $P(X < 2) = P(\varnothing) = 0$

$P(X \leq 2) = P(X = 2) = 0{,}3$

$P(3 < X \leq 5) =$

$= P(X = 4) + P(X = 5) =$

$= 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$

$P(X < 11) = p(E) = 1$

e) $P(X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$

f) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$

14.27. (PAU) Un dado ha sido manipulado con el fin de alterar las probabilidades de obtener las diferentes caras. Así, si x representa la puntación alcanzada en una tirada, se tiene:

$P(X = 1) = \frac{1}{6} - 2k$ $\quad P(X = 2) = \frac{1}{6} - k$ $\quad P(X = 3) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$

$P(X = 5) = \frac{1}{6} + k$ $\quad P(X = 6) = \frac{1}{6} + 2k$

Determina k para que la media de x sea igual a 4.

Calculemos su media e impongamos que sea igual a 4.

$$\mu = \sum x_i p_i = 1\left(\frac{1}{6} - 2k\right) + 2\left(\frac{1}{6} - k\right) + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\left(\frac{1}{6} + k\right) + 6\left(\frac{1}{6} + 2k\right) = \frac{21}{6} + 13k = 4;$$
$$k = \frac{1}{26}$$

14.28. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por:

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,15	0,25	0,2	m	0,15

a) Halla m para que se trate de una función de probabilidad.

b) Calcula y representa gráficamente la función de probabilidad.

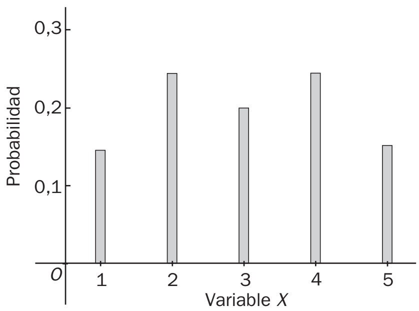
c) Halla $P(X \leq 4)$ y $P(2 \leq X < 4)$.

a) La suma de probabilidades tiene que ser 1; por tanto,

$$0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}2 + m + 0{,}15 = 1 \qquad \text{de donde } m = 0{,}25$$

b)

x_i	p_i
1	0,15
2	0,25
3	0,2
4	0,25
5	0,15



c) $P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}85$

$P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}45$

14.29. (PAU) La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la siguiente tabla.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	a	b	c	0,2

Sabiendo que $P(X \leq 2) = 0{,}7$ y $P(X \geq 2) = 0{,}75$, halla la esperanza matemática y la desviación típica.

En primer lugar calculemos los valores de a, b y c, teniendo en cuenta que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad.

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}1 + a + b + c + 0{,}2 = 1 \\ \text{De } p(X \leq 2) = 0{,}7 \Rightarrow 0{,}1 + a + b = 0{,}7 \\ \text{De } p(X \geq 2) = 0{,}75 \Rightarrow b + c + 0{,}2 = 0{,}75 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$a = 0{,}15 \qquad b = 0{,}45 \qquad c = 0{,}1$

Para el cálculo de los parámetros pedidos formamos la siguiente tabla:

x_i	p_i	x_ip_i	$x_i^2p_i$
0	0,1	0	0
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,9	1,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
	1	2,15	6,05

$\mu = 2{,}15$

$\sigma = \sqrt{6{,}05 - (2{,}15)^2} = 1{,}19$

Números combinatorios

14.30. Sin efectuar cálculos laboriosos, expresa como un único número combinatorio la siguiente expresión.

$$\binom{1354}{123} + \binom{1354}{124}$$

Teniendo en cuenta la propiedad 4.ª de los números combinatorios se tiene:

$$\binom{1354}{123} + \binom{1354}{124} = \binom{1355}{124}$$

14.31. Halla el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{194}{x} = \binom{194}{72}$

b) $\binom{x}{24} = \binom{x}{69}$

a) Teniendo en cuenta la tercera propiedad de los números combinatorios se tiene:

$$x + 72 = 194 \Rightarrow x = 194 - 72 = 122$$

b) Teniendo en cuenta que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, se deduce que $x = 24 + 69 = 93$.

14.32. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(x^2 - y)^6$

b) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5$

a) $(x^2 - y)^6 = \binom{6}{0}(x^2)^6 - \binom{6}{1}(x^2)^5 y + \binom{6}{2}(x^2)^4 y^2 - \binom{6}{3}(x^2)^3 y^3 + \binom{6}{4}(x^2)^2 y^4 - \binom{6}{5}x^2y^5 + \binom{6}{6}y^6 =$

$= x^{12} - 6x^{10}y + 15x^8y^2 - 20x^6y^3 + 15x^4y^4 - 6x^2y^5 + y^6$

b) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4\left(\frac{1}{x^2}\right) + \binom{5}{2}x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \binom{5}{3}x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \binom{5}{4}x\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 =$

$= x^5 + 5x^2 + \frac{10}{x} + \frac{10}{x^4} + \frac{5}{x^7} + \frac{1}{x^{10}}$

14.33. Simplifica la expresión: $\dfrac{\binom{19}{15}+\binom{19}{16}}{\binom{18}{14}+\binom{18}{15}}$

$$\frac{\binom{19}{15}+\binom{19}{16}}{\binom{18}{14}+\binom{18}{15}}=\frac{\binom{20}{16}}{\binom{19}{15}}=\frac{\frac{20!}{16!4!}}{\frac{19!}{15!4!}}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

Distribución binomial

14.34. Para la distribución $B(6;\ 0{,}2)$, calcula:

a) $P(X = 3)$
b) $P(X < 2)$
c) $P(X = 4)$
d) $P(X > 4)$

a) $P(X = 3) = \binom{6}{3}0{,}2^3 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}08192$

b) $P(X = 4) = \binom{6}{4}0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}01536$

c) $P(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{6}{0}0{,}2^0 \cdot 0{,}8^6 + \binom{6}{1}0{,}2^1 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}262144 + 0{,}393216 = 0{,}655360$

d) $P(X > 4) = p(X = 5) + p(X = 6) = \binom{6}{5}0{,}2^5 \cdot 0{,}8 + \binom{6}{6}0{,}2^6 = 0{,}001536 + 0{,}000064 = 0{,}0016$

14.35. ¿Cuál es la desviación típica de una distribución binomial de parámetros $n = 50$ y $p = 0{,}6$?

$\sigma = \sqrt{n\ p\ q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 3{,}46$

14.36. Dadas las distribuciones binomiales $B(20;\ 0{,}6)$ y $B(100;\ 0{,}23)$:

a) ¿Cuál tiene mayor media?
b) ¿Cuál tiene mayor dispersión?

a) $\mu_1 = 20$; $\mu_2 = 100$. Tiene mayor media $B(100;\ 0{,}23)$.

b) $\sigma_1 = \sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 2{,}19$. $\sigma_2 = \sqrt{100 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}77} = 4{,}208$. Tiene mayor dispersión $B(100;\ 0{,}23)$.

14.37. Un jugador de ajedrez tiene una probabilidad de ganar una partida de 0,25. Si juega cuatro partidas, calcula la probabilidad de que gane más de la mitad.

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de partidas ganadas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 4$, $p = 0{,}25$. Es decir, B(4; 0,25).

Hallamos la probabilidad pedida con ayuda de la tabla.

$P(\text{ganar más de dos partidos}) = P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}0469 + 0{,}0039 = 0{,}0508$

14.38. (PAU) En una ciudad se han elegido al azar 730 habitantes. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de ellos hayan nacido el 7 de mayo?

$p = P$ (haber nacido el mismo día) $= \dfrac{1}{365}$ $\qquad q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{365} = \dfrac{364}{365}$ $\qquad n = 730$

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de habitantes que han nacido el 7 de mayo. Se trata de una distribución binomial $B\left(730, \dfrac{1}{365}\right)$.

$P(X = 4) = \dbinom{730}{4}\left(\dfrac{1}{365}\right)^4\left(\dfrac{364}{365}\right)^{726} = 0{,}0902$

14.39. (PAU) En un torneo de ajedrez, Iván y Gabriel disputan la final. Gana el que antes venza en 5 partidas. Iván ganó la primera partida, pero Gabriel es igual de bueno que él. ¿Qué probabilidad tiene Iván de ganar el torneo, si se excluye la posibilidad de que hagan tablas?

Si son igual de buenos ambos jugadores, la probabilidad de que gane uno u otro es de $\dfrac{1}{2}$.

Como Iván ha ganado la primera partida, para que gane el torneo, sin contar tablas, deberá ganar 4 partidas más.

Por otro lado, con 8 partidas que se jueguen, sin contar tablas, habrá un vencedor, pues si Iván gana 4 o más, será el vencedor, y si gana menos, el vencedor será Gabriel.

Por tanto, estamos ante una distribución binomial de parámetros $B\left(8, \dfrac{1}{2}\right)$.

$P(\text{gane Iván}) = P(\text{gane 4 o más}) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) =$

(usando la tabla) $\quad = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] =$

$= 1 - 0{,}0039 - 0{,}0312 - 0{,}1094 - 0{,}2188 = 0{,}6367$

14.40. (PAU) Se lanza una moneda cuatro veces. Calcula la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

Se trata de una distribución binomial, $B(4; 0{,}5)$. Saldrán más caras que cruces si salen 3 ó 4 caras:

$P(\text{más caras que cruces}) = \dbinom{4}{3}(0{,}5)^3(0{,}5) + \dbinom{4}{4}(0{,}5)^4 = (4 + 1)(0{,}5)^4 = 0{,}3125$

14.41. (PAU) El 4% de los CD para ordenador que fabrica una determinada empresa resultan defectuosos. Los CD se distribuyen en cajas de 5 unidades. Calcula la probabilidad de que en una caja no haya ningún disco defectuoso.

Sea X la variable que expresa el número de CD que no están defectuosos. Se trata de una distribución binomial $B(5; 1 - 0{,}04) = B(5; 0{,}96)$. La probabilidad pedida es:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5}0{,}96^5 = 0{,}8154$$

14.42. (PAU) Se lanza una moneda al aire 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 3 caras?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de caras en los cinco lanzamientos. Se trata de una distribución binomial, $B(5; 0{,}5)$.

Utilizando la tabla de la binomial se tiene:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}3125 + 0{,}1562 + 0{,}0312 = 0{,}4999$$

14.43. En un determinado juego se gana cuando al lanzar dos dados se obtiene suma de puntos igual a 10 o más. Un jugador tira en 12 ocasiones los dos dados. Calcula las siguientes probabilidades.

a) Que gane exactamente en tres ocasiones.

b) Que pierda las 12 veces que juega.

c) Que gane al menos en la mitad de los lanzamientos.

$P(\text{obtener suma 10 o más al lanzar 2 dados}) = P(S_{10}) + P(S_{11}) + P(S_{12}) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de veces que ha ganado el jugador de las 12 ocasiones en las que juega. Se trata de una distribución $B\left(12, \frac{1}{6}\right)$.

a) $P(\text{ganar 3 veces}) = P(X = 3) = \binom{12}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0{,}1974$

b) $P(\text{perder las 12 veces}) = P(\text{ganar 0 veces}) = P(X = 0) = \binom{12}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{12} = 0{,}11216$

c) $P(\text{ganar en al menos la mitad de los lanzamientos}) = P(\text{ganar en seis o más lanzamientos}) =$
$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12)$

$P(X = 6) = \binom{12}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}006632$ $\quad P(X = 7) = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}000114$

$P(X = 8) = \binom{12}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}000142$ $\quad P(X = 9) = \binom{12}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}000013$

$P(X = 10) = \binom{12}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}00000076$ $\quad P(X = 11) = \binom{12}{11}\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0{,}000000028$

$P(X = 12) = \binom{12}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} = 0{,}00000000046$

14.44. (PAU) Un examen de opción múltiple está compuesto por 9 preguntas, con 4 posibles respuestas cada una, de las cuales solo una es correcta. Suponiendo que uno de los estudiantes que realiza el examen responda al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 6 preguntas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte ninguna?

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de respuestas contestadas correctamente. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0{,}25$. Es decir, $B(9; 0{,}25)$.

a) $P(X = 6) = 0{,}0087$

b) $P(X = 0) = 0{,}0751$

14.45. Se extrae una carta de una baraja española y se vuelve a introducir. Se considera la variable X = "número de ases o de oros extraídos". La experiencia se repite 8 veces. Se pide $P(X = 3)$ y $P(X < 3)$.

$P(\text{as u oros}) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$. Se trata de una distribución binomial $B\left(10, \frac{13}{40}\right)$.

$P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{13}{40}\right)^3\left(\frac{27}{40}\right)^7 = 0{,}2630$

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{27}{40}\right)^{10} + 10\,\frac{13}{40}\left(\frac{27}{40}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{13}{40}\right)^2\left(\frac{27}{40}\right)^8 = 0{,}319012$

14.46. Si el 20% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determina la probabilidad de que entre 4 cerrojos elegidos al azar:

a) Uno sea defectuoso.

b) Como mucho, dos sean defectuosos.

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de cerrojos defectuosos. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 4$, $p = 0{,}20$; es decir, $B(4; 0{,}2)$.

a) $P(X = 1) = \binom{4}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}4096$

b) $P(\text{a lo más, 2 defectuosos}) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
$= 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = 0{,}9728$

14.47. En una prueba sobre fluidez verbal hecha a un grupo de niños se ha detectado que el 35% tiene una fluidez verbal baja, mientras que para el resto se puede considerar aceptable.

De una muestra aleatoria formada por siete niños, halla:

a) La media y la varianza.

b) La función de probabilidad.

A = "fluidez verbal nula" $\overline{A}$ = "fluidez verbal no nula"

$p = P(A) = 0{,}35$ $q = P(\overline{A}) = 0{,}65$

Se trata de una distribución binomial $B(7; 0{,}35)$.

a) Media: $\mu = n \cdot p = 7 \cdot 0{,}35 = 2{,}45$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 7 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 1{,}59$

b) De la expresión $p_i = P(X = x_i) = \binom{7}{x_i} 0{,}35^{x_i} \cdot 0{,}65^{7-x_i}$ o bien utilizando la tabla de la binomial se obtiene la función de probabilidad.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,0490	0,1848	0,2985	0,2679	0,1442	0,0466	0,0084	0,0006

14.48. Una empresa de servicios destinados a los ayuntamientos presenta 20 proyectos cada año en otros tantos municipios. La probabilidad de que uno de sus proyectos sea aceptado es de 0,3.

a) ¿Cuál es el número esperado de proyectos aceptados anualmente?

b) ¿Cuál es la desviación típica del número de proyectos aceptados?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de proyectos aceptados. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 20$ y $p = 0{,}3$; es decir, $B(20; 0{,}3)$.

a) $\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}3 = 6$. El número esperado de proyectos es 6.

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{4{,}2} = 2{,}05$

14.49. En una urna hay 3 bolas blancas y 2 negras. Sea la variable aleatoria X = "número de bolas blancas extraídas en cuatro extracciones", obtén su distribución de probabilidad.

La bola se devuelve a la urna tras cada extracción.

$P(\text{bola blanca}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Por tanto, X es una binomial $B(4; 0{,}6)$.

$P(X = 0) = \binom{4}{0} 0{,}4^4 = 0{,}0256$ $P(X = 1) = \binom{4}{1} 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}1536$ $P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456$

$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456$ $P(X = 4) = \binom{4}{4} 0{,}6^4 = 0{,}1296$

14.50. En unas elecciones celebradas en un determinado país, la abstención ha alcanzado el 30% del censo electoral.

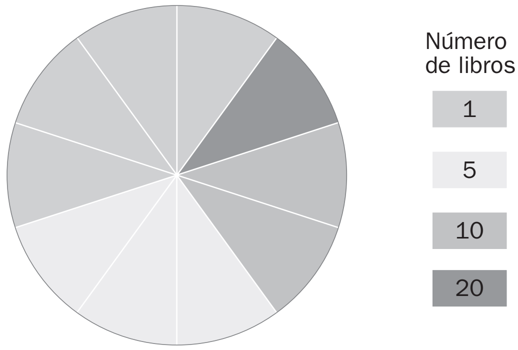
Si se seleccionan al azar 3 individuos inscritos en dicho censo, ¿qué probabilidad hay de que ninguno haya votado? ¿Y de que solo uno haya votado?

Sea X la variable aleatoria que representa el número de integrantes del censo que se han abstenido. Se trata de una binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0{,}3$.

$P(\text{ninguno haya votado}) = P(X = 3) = 0{,}0270$

$P(\text{haya votado uno}) = P(X = 2) = 0{,}1890$

14.51. En el concurso cultural *La ruleta de la suerte*, los concursantes impulsan la ruleta de la figura y reciben el premio que marca cuando para consistente en un lote de libros.



a) Describe los posibles valores de la variable aleatoria "premio obtenido en la ruleta" y la distribución de probabilidades.

b) ¿Cuál será la probabilidad de ganar entre 6 y 20 libros?

a)

x_i	1	5	10	20
p_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

b) $P(X = 10) + P(X = 20) = \dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$

14.52. Explica cuál es la expresión de la probabilidad de que al lanzar 3 monedas perfectas se obtengan x caras. Si ahora se han lanzado dichas monedas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

c) Si se sabe que se ha obtenido un número impar de caras, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenido sea 1?

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de caras obtenidas en las tres monedas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0{,}5$; es decir, $B(3;\ 0{,}5)$.

a) $P(\text{obtener 1 cara}) = P(X = 1) = 0{,}375$

b) $P(\text{obtener 3 caras}) = P(X = 3) = 0{,}125$

c) $P(X = 1/X \text{ ha sido impar}) = \dfrac{p(X = 1)}{p(X = 1) + p(X = 3)} = \dfrac{0{,}375}{0{,}375 + 0{,}125}\,0{,}75$

14.53. En un proceso de fabricación, la probabilidad de que una unidad producida pase el control de calidad es del 90%. En un lote de 8 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que todas pasen el control de calidad? ¿Y de que lo pasen al menos 6?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de unidades que pasan el control de calidad Se trata de una distribución $B(8;\ 0{,}9)$.

$P(X = 8) = \binom{8}{8} 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}4305$

$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{8}{6} 0{,}9^6 \cdot 0{,}1^2 + \binom{8}{7} 0{,}9^7 \cdot 0{,}1^1 + \binom{8}{8} 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^0 =$

$= 0{,}1488 + 0{,}3826 + 0{,}43205 = 0{,}9619$

14.54. Después de realizar varios sondeos sobre la población juvenil de cierta localidad se ha conseguido averiguar que únicamente el 20% de la misma no va regularmente a la discoteca. Elegida al azar una muestra de 50 jóvenes de dicha población, se desea saber la probabilidad de que:

a) Haya más de 5 jóvenes que no vayan regularmente a la discoteca.

b) A lo sumo haya 6 personas que no frecuenten esos lugares de ocio.

Sea X la variable aleatoria discreta que expresa el número de jóvenes que no van regularmente a las discotecas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 50$ y $p = 0{,}2$; es decir, $B(50; 0{,}2)$.

a) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)]$

$P(X = 0) = \binom{50}{0} 0{,}8^{50} = 0{,}0000143$ $\qquad P(X = 1) = \binom{50}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^{49} = 0{,}0001784$

$P(X = 2) = \binom{50}{2} 0{,}2^{2} \cdot 0{,}8^{48} = 0{,}0011$ $\qquad P(X = 3) = \binom{50}{3} 0{,}2^{3} \cdot 0{,}8^{47} = 0{,}00437$

$P(X = 4) = \binom{50}{4} 0{,}2^{4} \cdot 0{,}8^{46} = 0{,}01284$ $\qquad P(X = 5) = \binom{50}{5} 0{,}2^{5} \cdot 0{,}8^{45} = 0{,}02953$

$P(X > 5) = 1 - (0{,}000043 + 0{,}0001784 + 0{,}0011 + 0{,}00437 + 0{,}01284 + 0{,}02953) =$
$= 1 - 0{,}0480327 = 0{,}9519673$

b) $P(X \leq 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$= 0{,}0480327 + 0{,}05537 = 0{,}0535697$

14.55. (PAU) Si de 650 alumnos de 1.º de Bachillerato sólo 200 aprueban Matemáticas, halla la probabilidad de que al elegir 5 de estos alumnos al azar:

a) Ninguno apruebe Matemáticas.

b) Aprueben, a lo sumo, 2.

c) Al menos 4 aprueben.

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de alumnos aprobados en Matemáticas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $p = \frac{200}{650} = 0{,}3$; es decir, $B(5; 0{,}3)$.

Para calcular las probabilidades indicadas, haremos uso de la tabla de la binomial.

a) $P(X = 0) = 0{,}1681$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}1681 + 0{,}3602 + 0{,}3087 = 0{,}8370$

c) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0284 + 0{,}0024 = 0{,}0308$

14.56. Un jugador de tenis tiene una probabilidad de 0,4 de colocar su primer servicio. Si hace series de 10 servicios, calcula:

a) El número de primeros servicios acertados.

b) La probabilidad de que acierte más de cinco primeros servicios.

c) La probabilidad de que no acierte ningún primer servicio.

Sea X la variable aleatoria que indica el número de primeros servicios acertados. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}4$; es decir, $B(10; 0{,}4)$.

a) Se trata de la esperanza matemática:

$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}4 = 4$$

Se espera que en los 10 servicios, 4 entren.

b) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$
$= 0{,}1115 + 0{,}0425 + 0{,}0106 + 0{,}0016 + 0{,}0001 = 0{,}1663$

c) $P(X = 0) = 0{,}1296$

14.57. Se sabe que el 75% de los enfermos de una dolencia tratados con un nuevo fármaco mejoran sus condiciones de vida. Se eligen al azar 8 de estos enfermos. Calcula la probabilidad de que:

a) Al menos 6 mejoren sus condiciones de vida.

b) Como máximo 6 mejoren sus condiciones de vida.

Si se considera éxito el que un enfermo mejore sus condiciones de vida, la variable X que indica el número de enfermos que mejoran es $B(8;\ 0{,}65)$.

Si se quiere utilizar la tabla de la binomial, al ser $p > 0{,}5$, hay que definir la variable Y que indica el número de enfermos que no mejoran y que es $B(8;\ 0{,}35)$.

a) $P(X \geq 6) = P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}0319 + 0{,}1373 + 0{,}2587 = 0{,}4279$

b) $P(X \leq 6) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)] = 1 - 0{,}0319 - 0{,}1373 = 0{,}8308$

14.58. (PAU) Si se contesta al azar un test de 8 preguntas con respuestas Sí / No, ¿cuál es la probabilidad de acertar más de 5? ¿Y la probabilidad de acertar 3 ó 4?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de preguntas acertadas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}5$; es decir, $B(8;\ 0{,}5)$.

Calcularemos las probabilidades utilizando la tabla de la binomial.

$P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0{,}1094 + 0{,}0312 + 0{,}0039 = 0{,}1445$

$P(\text{acertar 3 ó 4}) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2188 + 0{,}2734 = 0{,}4922$

14.59. (PAU) La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es de $\frac{1}{4}$. Si dispara 10 veces:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una vez?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de aciertos en el blanco. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}25$; es decir, $B(10;\ 0{,}25)$.

Calcularemos las probabilidades utilizando la tabla de la binomial.

a) $P(X = 3) = 0{,}2503$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0563 = 0{,}9437$

14.60. (PAU) Se va a construir una planta nuclear en cierta comunidad. Se sabe que el 80% de la población se opone a ello y el 20% restante está a favor.

a) Si se elige al azar una muestra de 5 personas, ¿cuál es la probabilidad de que 3 o más estén a favor de la construcción?

b) Si se elige al azar una muestra de 20 personas, ¿cuál es la probabilidad de que todas estén en contra de la construcción?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de personas que están a favor de la construcción de la planta nuclear.

a) Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}2$.

Calcularemos la probabilidad utilizando la tabla de la binomial.

$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0512 + 0{,}0064 + 0{,}0003 = 0{,}0579$

b) En este caso se trata de una distribución $B(20;\ 0{,}2)$.

Si los 20 han de estar en contra, entonces habrá 0 personas a favor; por tanto, hay que calcular $P(X = 0)$. En este caso es preciso utilizar la fórmula.

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}8^{20} = 0{,}0115$$

14.61. (PAU) Vicente hace la compra habitualmente los sábados en un supermercado con buenos precios, pero no muy bien organizado, ya que solo el 90% de los artículos están marcados. Si el sábado Vicente compró 10 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos no estuviera marcado? ¿Y de que solo cuatro estuvieran marcados?

Sea X la variable que expresa el número de artículos marcados con precio. Se trata de una distribución binomial $B(10;\ 0{,}9)$.

$P(\text{algún artículo no marcado}) = 1 - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}9^{10} = 1 - 0{,}3487 = 0{,}6513$

$P(\text{exactamente 4 marcados}) = p(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}9^{4} \cdot 0{,}1^{6} = 0{,}000138$

14.62. (PAU) Un proceso de producción tiene una proporción de piezas defectuosas del 25%.

a) Si se toman nueve piezas, ¿cuál es la probabilidad de encontrar dos defectuosas?

b) ¿Cuántas piezas, como mínimo, se han de tomar para que la probabilidad de encontrar al menos una defectuosa sea de 0,8?

a) Sea X la variable que expresa el número de piezas defectuosas. Se trata de una distribución $B(9;\ 0{,}25)$.

Utilizando la tabla de la binomial: $P(X = 2) = 0{,}3003$.

b) En este caso, el parámetro n es desconocido y conocemos la probabilidad de encontrar al menos una pieza defectuosa.

La probabilidad de no encontrar una pieza defectuosa es: $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}25^{0} \cdot 0{,}75^{n} = 0{,}75^{n}$.

La probabilidad de encontrar al menos una pieza defectuosa es: $1 - P(X = 0) = 0{,}8$. Por tanto, queda:

$$1 - 0{,}75^{n} = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}2 = 0{,}75^{n}$$

Tomando logaritmos se tiene:

$$n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}75} = 5{,}59$$

El número de muestras como mínimo ha de ser 6.

14.63. (PAU) Un vendedor de seguros vende pólizas a 5 personas de la misma edad y con buena salud. Según las tablas actuariales, la probabilidad de que una persona en esas condiciones viva 30 años o más es de $\frac{2}{3}$. Calcula la probabilidad de que al cabo de 30 años vivan:

a) Las 5 personas.

b) Al menos 3.

c) Solo 2 personas.

Sea X la variable que mide el número de personas que viven más de 30 años. Se trata de una distribución $B\left(5,\ \frac{2}{3}\right)$.

a) $P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = 0{,}1317$

b) $P(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} =$

$= 0{,}3292 + 0{,}3292 + 0{,}1317 = 0{,}7901$

c) $P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} = 0{,}1646$

14.64. Quinientos opositores han participado en una prueba escrita que consta de 3 ejercicios. Los resultados obtenidos son los que figuran en la siguiente tabla.

N.º de ejercicios aprobados	0	1	2	3
N.º de opositores	136	223	120	21

Ajusta a esta distribución empírica una distribución binomial y halla las frecuencias teóricas esperadas.

Veamos si se trata de una distribución binomial.

1.º En cada ejercicio sólo son posibles dos resultados: aprobado o suspenso.

2.º El resultado obtenido en cada ejercicio es independiente de los ejercicios anteriores.

3.º La probabilidad del suceso aprobar un ejercicio es constante.

La distribución binomial que mejor se ajusta a esta distribución empírica será la que tenga por media la media observada $\bar{x}$.

La media observada es: $\bar{x} = \dfrac{1 \cdot 223 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 21}{500} = 1{,}052$.

Como $\mu = n \cdot p = 3 \cdot p = 1{,}052 \Rightarrow p = \dfrac{1{,}052}{3} = 0{,}35$

Así pues, se trata de una distribución $B(3; 0{,}35)$. Si representamos por X la variable que expresa el número de ejercicios aprobados de los tres realizados, podemos calcular las frecuencias absolutas teóricas sin más que multiplicar 500 por la probabilidad de aprobar 0, 1, 2 y 3 ejercicios.

$P(X = 0) = 0{,}2746$; $500 \cdot 0{,}2746 = 137$. $P(X = 1) = 0{,}4436$; $500 \cdot 0{,}4436 = 222$

$P(X = 2) = 0{,}2389$; $500 \cdot 0{,}2389 = 119$. $P(X = 3) = 0{,}0429$; $500 \cdot 0{,}0429 = 21$

14.65. En una ciudad se ha hecho un estudio sobre 1000 familias con 5 hijos para saber el número de hijas que tienen y se ha obtenido la siguiente tabla.

N.º de chicas	0	1	2	3	4	5
N.º de familias	54	202	334	279	115	16

Ajusta a esta distribución empírica una distribución binomial y halla las frecuencias teóricas.

Veamos si se trata de una distribución binomial.

1.º En cada parto sólo son posibles dos resultados: chico o chica.

2.º El resultado obtenido en cada parto es independiente de los partos anteriores.

3.º La probabilidad del suceso nacer mujer es constante.

La distribución binomial que mejor se ajusta a esta distribución empírica será la que tenga por media la media observada $\bar{x}$.

La media observada es: $\bar{x} = \dfrac{1 \cdot 202 + 2 \cdot 334 + 3 \cdot 279 + 4 \cdot 115 + 5 \cdot 16}{1000} = 2{,}247$.

Como $\mu = n \cdot p = 5 \cdot p = 2{,}247 \Rightarrow p = \dfrac{2{,}247}{5} = 0{,}45$

Así pues, se trata de una distribución $B(5; 0{,}45)$. Si representamos por X la variable que expresa el número de hijas nacidas en cada familia de cinco hijos, podemos calcular las frecuencias absolutas teóricas sin más que multiplicar 1000 por la probabilidad de 0, 1, 2, 3, 4 y 5 niñas.

$P(X = 0) = 0{,}0503$; $1000 \cdot 0{,}0503 = 50$.

$P(X = 1) = 0{,}2059$; $1000 \cdot 0{,}2059 = 206$.

$P(X = 2) = 0{,}3369$; $1000 \cdot 0{,}3369 = 337$.

$P(X = 3) = 0{,}2757$; $1000 \cdot 0{,}2757 = 276$.

$P(X = 4) = 0{,}1128$; $1000 \cdot 0{,}1128 = 113$.

$P(X = 5) = 0{,}0185$; $1000 \cdot 0{,}0185 = 18$.

14.66. **La dirección de un hotel situado en una zona turística ha observado que el 8% de las reservas de habitaciones se anulan a última hora. Por esta razón, y aunque el número de habitaciones disponibles es de 20, se admiten 22 reservas para una misma noche. Calcula la probabilidad de que el hotel no pueda satisfacer todas las solicitudes y la probabilidad de que sobren habitaciones.**

Sea X la variable aleatoria que indica el número de reservas anuladas. Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 22$ y $p = 0{,}08$; es decir, $B(22; 0{,}08)$.

El hotel no podrá satisfacer todas las solicitudes si no se produce ninguna anulación:

$$P(X = 0) = \binom{22}{0} 0{,}92^{22} = 0{,}1597$$

Sobrarán habitaciones si se producen tres anulaciones o más:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$P(X = 1) = \binom{22}{1} 0{,}08 \cdot 92^{21} = 0{,}3055 \qquad P(X = 1) = \binom{22}{2} 0{,}08^{2} \cdot 92^{20} = 0{,}27896$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0{,}1597 - 0{,}3055 - 0{,}27896 = 0{,}25584$$

14.67. **(PAU) Si la probabilidad de que ocurra un suceso A es $P(A) = \frac{1}{5}$, ¿cuál es el mínimo número de veces que hay que repetir el experimento para que la probabilidad de que ocurra al menos una vez el suceso A sea mayor que $\frac{1}{2}$? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos dos veces A al realizar 5 veces el experimento?**

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de éxitos obtenido en n pruebas. Se trata de una distribución $B(n, 0{,}2)$.

$$P(X \geq 1) > \frac{1}{2} \Rightarrow P(X < 1) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow P(X = 0) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n = 4$$

Por tanto, el número mínimo de veces que hay que repetir el experimento para que la probabilidad de que ocurra al menos una vez el suceso A sea mayor que $\frac{1}{2}$ es $n = 4$.

Se trata de una distribución $B(5; 0{,}2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0{,}3277 + 0{,}4096) = 0{,}2627$$

14.68. **(PAU) El 73% de la población adulta conoce una determinada enfermedad. Se reúnen 5 amigos para cenar y uno de ellos hace referencia a esta afección.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 amigos puedan intervenir en la conversación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la conversación no se llegue a plantear?

c) Si el índice de mortalidad de la enfermedad es del 60% y hay 6 personas afectadas en un hospital, ¿cuál es la probabilidad de que al menos la mitad de ellas sobreviva?

Sea X la variable aleatoria que expresa el número de amigos que intervienen en la conversación. Se trata de una distribución binomial $B(5; 0{,}73)$.

a) $P(X = 5) = 0{,}73^{5} = 0{,}2073$

b) $P(X = 0) = (1 - 0{,}73)^{5} = 0{,}27^{5} = 0{,}0014$

c) Sea X el número de personas que mueren. Se trata de una distribución $B(6; 0{,}6)$.

$$P(X \leq 2) = 0{,}4^{5} + \binom{6}{1} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{5} + \binom{6}{2} 0{,}6^{2} \cdot 0{,}4^{4} = 0{,}0041 + 0{,}0369 + 0{,}1382 = 0{,}1792$$

Probabilidad de que la menos la mitad de ellas sobreviva $= 1 - 0{,}1792 = 0{,}8208$.

14.69. Un peregrino sigue el Camino de Santiago. Se programa las etapas para poder hacerlo en 40 días. La probabilidad de que un día al azar llueva es de 0,3. Si un día llueve, el peregrino cena sopa de sobre. Si el que llueva un día es independiente de que llueva cualquier otro:

a) ¿Cuál es el número de días de lluvia esperado?

b) Calcula la probabilidad de que como mucho llueva 8 días.

c) Si el peregrino quiere tener sobres de sopa para todo el camino con una probabilidad de 0,9, ¿cuántos tiene que poner en su mochila?

Sea X la variable que representa los días de lluvia. Se trata de una binomial $B(40;\ 0{,}3)$.

a) $\mu = 40 \cdot 0{,}3 = 12$. Se espera que llueva 12 días.

b) $P(X \le 8) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) +$
$+ P(X = 7) + P(X = 8)$

$P(X = 0) = \binom{40}{0} 0{,}7^{40} = 0{,}00000064$ $\quad P(X = 1) = \binom{40}{1} 0{,}3 \cdot 0{,}7^{39} = 0{,}000011$

$P(X = 2) = \binom{40}{2} 0{,}3^{2} \cdot 0{,}7^{38} = 0{,}0000053$ $\quad P(X = 3) = \binom{40}{3} 0{,}3^{3} \cdot 0{,}7^{37} = 0{,}000495$

$P(X = 4) = \binom{40}{4} 0{,}3^{4} \cdot 0{,}7^{36} = 0{,}001963$ $\quad P(X = 5) = \binom{40}{5} 0{,}3^{5} \cdot 0{,}7^{35} = 00606$

$P(X = 6) = \binom{40}{6} 0{,}3^{6} \cdot 0{,}7^{34} = 0{,}0151$ $\quad P(X = 7) = \binom{40}{7} 0{,}3^{7} \cdot 0{,}7^{33} = 0{,}03152$

$P(X = 8) = \binom{40}{8} 0{,}3^{8} \cdot 0{,}7^{32} = 0{,}0557$

c) $P(X \le x) = 0{,}9$

Con ayuda de una calculadora se van hallando las probabilidades $P(X = x)$ y sumando sucesivamente hasta comprobar que par $x = 16$ es cuando se alcanza la probabilidad 0,9.

OBSERVACIÓN: Este problema resultará más fácil cuando se estudie en el siguiente tema la aproximación de la normal por una binomial.

PROFUNDIZACIÓN

14.70. Una variable aleatoria X toma valores en los puntos 1, 2, 3…, n…; la ley de probabilidad es:

$$P(X = n) = \frac{k}{3^n}$$

Determina el valor de k y calcula la media.

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{3^n} = \frac{k}{3} + \frac{k}{3^2} + \frac{k}{3^3} + \ldots = k\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) = k\,\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$$

$$\mu = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3^2} + 3 \cdot \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \ldots$$ Multiplicando ambos miembros por 3.

$$3\mu = 2 + \frac{4}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \ldots$$ Restando ambas igualdades.

$$2\mu = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$ De donde $\mu = \frac{3}{2}$

14.71. (PAU) En unos controles realizados sobre un conjunto de conductores se ha observado que el 5% de estos dan positivo en la prueba de alcoholemia y que un 10% no llevan abrochado el cinturón de seguridad. También se ha observado que las dos infracciones son independientes. Un guardia de tráfico para a cinco conductores al azar. Si tenemos en cuenta que el número de conductores es suficientemente importante como para estimar que la proporción de infractores no varía al hacer la selección:

a) Determina la probabilidad de que exactamente tres conductores hayan cometido alguna de las dos infracciones.

b) Determina la probabilidad de que al menos uno de los conductores controlados haya cometido alguna de las dos infracciones.

Consideremos los sucesos:

A = "el conductor controlado da positivo en la prueba de alcoholemia"

B = "el conductor controlado no lleva abrochado el cinturón de seguridad"

La probabilidad de que un conductor sometido a control haya cometido alguna de las dos infracciones es:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}145$

a) Sea X la variable aleatoria que expresa el número de conductores que han cometido alguna infracción. Se trata de una distribución binomial $B(5;\ 0{,}145)$.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}145)^3(1 - 0{,}145)^2 = 0{,}0223$$

b) La probabilidad de que ninguno de los cinco conductores haya cometido ninguna de las dos infracciones es:

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}(0{,}145)^0(1 - 0{,}145)^5 = (0{,}855)^5 = 0{,}4569$$

Por tanto, la probabilidad de que al menos uno de los conductores controlados haya cometido alguna de las dos infracciones es:

$$p = 1 - 0{,}4569 = 0{,}5431$$

14.72. (PAU) Dos jugadores apuestan lo siguiente: el primero, que al lanzar un dado obtiene por lo menos dos seises en 6 tiradas; el segundo, que al lanzar una moneda 10 veces obtiene por lo menos 7 veces cara. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de conseguir su propósito?

Primer jugador

Sea X la variable que expresa el número de seises obtenidos. Esta variable sigue una distribución $B\left(6, \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 1 - 0{,}3349 - 0{,}4019 = 0{,}2632$$

Segundo jugador

Sea X' la variable que expresa el número de caras en 10 lanzamientos. Esta variable sigue una distribución $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

$$P(X' \geq 7) = P(X' = 7) + P(X' = 8) + P(X' = 9) + P(X' = 10) =$$
$$= \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$
$$= 0{,}1172 - 0{,}0439 + 0{,}0098 + 0{,}00097 = 0{,}1719$$

14.73. (PAU) Halla la moda de la distribución de probabilidad: $P(X = r) = \binom{8}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{8-r}$

¿Se trata de una distribución binomial?

Evidentemente, se trata de una distribución binomial $B\left(8, \frac{1}{3}\right)$.

Completamos la tabla de la función de probabilidad con ayuda de la tabla de la binomial.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,0390	0,1561	0,2731	0,2731	0,1707	0,0683	0,0171	0,0024	0,0002

Se trata de una distribución bimodal. Los dos valores que más se repiten son 2 y 3.

14.74. (PAU) Dada la distribución de probabilidad definida de la siguiente forma:

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \ldots; P(X = 2) = \frac{1}{2^2} \ldots, P(X = i) = \frac{1}{2^i} \ldots$$

Comprueba que realmente es una distribución de probabilidad y halla su media.

$$\sum_i P(X = x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Luego, en efecto, se trata de una distribución de probabilidad discreta.
La media es:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots$$ Multiplicando ambos miembros por 2

$$2\mu = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots$$ Restando ambas igualdades

$$\mu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$ $\mu = 2$

14.75. Demuestra que $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{r![(n-1)-r]!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!r}{r(r-1)!(n-r)!} = \frac{(n-1)![(n-r)+r]}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

14.76. Se selecciona al azar una muestra de 3 artículos de una caja que contiene 12, de los cuales 3 son defectuosos. Halla la media.

Si X es la variable que indica el número de artículos defectuosos, se tiene:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{84}{220} \qquad P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{108}{220} \qquad P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220} \qquad \mu = \frac{108}{220} + 2 \cdot \frac{27}{220} + 3 \cdot \frac{1}{220} = \frac{165}{220} = 0,75$$

14.77. **Se extraen 4 bolas con reemplazamiento de una urna que contiene 10 bolas azules y 6 blancas. La variable aleatoria *X* indica el número de bolas azules extraídas. Construye la distribución de probabilidad de *X* y calcula sus parámetros.**

$P(X = 0) = \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} = 0{,}0198$ $\quad P(X = 1) = 4 \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} = 0{,}1318$

$P(X = 3) = 6 \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} = 0{,}3295$ $\quad P(X = 3) = 4 \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{16} = 0{,}3662$

$P(X = 4) = \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} = 0{,}1525$

$\mu = 0{,}1318 + 2 \cdot 0{,}3295 + 3 \cdot 0{,}3662 + 4 \cdot 0{,}1525 = 2{,}5$

$\sigma^2 = 0{,}1318 + 4 \cdot 0{,}3295 + 9 \cdot 0{,}3662 + 16 \cdot 0{,}1525 - 2{,}5^2 = 0{,}9356$ $\quad \sigma = \sqrt{0{,}9356} = 0{,}967$

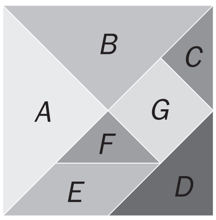
14.78. **Se tira cinco veces una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3. Halla la probabilidad de obtener un total de 12 puntos.**

La única posibilidad de obtener 12 puntos es que aparezca tres veces el número 2 y dos veces el número 3.

Sea la variable *X*, que indica el número de veces que aparece el 2. Se trata de una binomial $B(5;\ 0{,}5)$.

$P(\text{obtener } 12) = P(X = 3) = 0{,}3125$

14.79. **Sobre un terreno parcelado como aparece en la figura se lanza al azar un paracaidista. Calcula la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X* = "aterrizar en la parcela *i*".**



$P(X = A) = P(X = B) = \frac{1}{4}$

$P(X = C) = P(X = D) = P(X = F) = \frac{1}{8}$

$P(X = E) = P(X = G) = \frac{1}{16}$