

TEMA 0: CONCEPTOS BÁSICOS.

1. Intervalos.
2. Propiedades de las potencias.
3. Propiedades de los radicales. Operaciones con radicales. Racionalización.
4. Conceptos de un polinomio. Factorización de polinomios.
5. Fracciones algebraicas.
6. Resolución de ecuaciones de grado uno y dos.
7. Sistemas de ecuaciones.

1. Intervalos:

Los intervalos representan un conjunto de puntos de la recta real. En este concepto debemos tener claro el infinito, tanto positivo como negativo: $+\infty$ y $-\infty$. Hay diferentes notaciones para los conjuntos de números, pero la más importante y más utilizada es la de los intervalos. Los corchetes se utilizan para incluir el extremo en el conjunto de números y los paréntesis, para no incluirlo.

Hay varios tipos de intervalos: abiertos, semiabiertos o semicerrados y cerrados, además de los intervalos infinitos:

$$(3,7) \text{ intervalo abierto } [-5,2] \text{ intervalo cerrado}$$

$$(0,2] [-3,5) \text{ intervalos semiabiertos o semicerrados}$$

$$(-\infty, 4) (-\infty, 2] [1, +\infty) (-2, +\infty) \text{ intervalos infinitos}$$

$$\text{Otra notación: } \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} = \dot{\leq}$$

OBSERVACIÓN: El infinito nunca lleva un corchete porque nunca podemos llegar a tocarlo.

Unión de intervalos: tomamos todos los puntos que forman los dos intervalos:

$$(-\infty, 5) \cup [2, 8) = (-\infty, 8)$$

Intersección de intervalos: tomamos sólo los puntos comunes de los dos intervalos:

$$(-\infty, 5) \cup [2, 8) = \dot{\cap}$$

ACTIVIDAD 1: Representa en la recta real cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $[4, +\infty)$ b) $(-\infty, -1) \cup [5, 10)$ c) $(-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$ d) $[\frac{3}{4}, +\infty) - \{1\}$ e)

f) $\{a \in \mathbb{R} / a < -3, a \geq 5\}$

f) $\{b \in \mathbb{R} / b \geq 5, b \neq 7\}$

2. Propiedades de las potencias.

Sean x e y dos números reales cualesquiera y a y b dos números enteros, $x, y \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{Z}$

1. Multiplicación de potencias con la misma base.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(-2)^3 \cdot (-2)^{-6} = (-2)^{-3}$$

2. División de potencias con la misma base.

$$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$5^4 : 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = 5^2$$

3. Multiplicación de potencias con el mismo exponente.

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

$$(-2)^7 \cdot (-4)^7 = 8^7$$

4. División de potencias con el mismo exponente.

$$x^a : y^a = \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$30^{-6} : 5^{-6} = \frac{30^{-6}}{5^{-6}} = 6^{-6}$$

5. Potencia de una potencia.

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$(2^{-4})^3 = 2^{-12}$$

- | | | |
|---|---|--|
| 6. Potencias con exponente negativo. | $x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a}$ | $(-2)^{-5} = \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{2^5}$ |
| 7. La unidad elevada a cualquier número sigue siendo la unidad. | $1^a = 1$ | $1^{-123} = 1$ |
| 8. Todo número elevado a cero es uno. | $x^0 = 1$ | $(-14.576)^0 = 1$ |
| 9. Todo número elevado a uno es él mismo. | $x^1 = x$ | $23^1 = 23$ |

OBSERVACIÓN: Los paréntesis en las potencias se utilizan para englobar a la base, es decir, si queremos que la base de una potencia sea un número negativo, debemos usar el paréntesis. Por el contrario, si sólo queremos que la potencia sea negativa, no lo usamos. Veamos un ejemplo de cada caso:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81 \quad -3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

ACTIVIDAD 2: Simplifica cada una de las expresiones lo máximo posible:

$$a \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\left(\frac{7}{3}\right)^5\right)^{-2} \quad b \cdot \frac{4^9 \cdot 4^7 \cdot (4^2)^{-5}}{(-4)^5 \cdot ((-4)^2)^{-3}} \quad c \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} : 49^5 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^2$$

$$d \cdot [4 \cdot 4^2 \cdot (4^{-3})^{-5} \cdot 4^2] \cdot 5^3 : 25^{-5} \cdot (5^4)^6 \quad e \cdot -5 + (-2)^3 \cdot [4 - 5^2 - 1]$$

3. Propiedades de los radicales. Operaciones con radicales. Racionalización.

Los **radicales** son potencias con el exponente fraccionario de manera que el numerador de la fracción pasa a potencia de la base y el denominador, a índice del radical:

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

Veamos cuáles son las **propiedades** que verifican los radicales:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Multiplicación de radicales con el mismo índice. | $\sqrt[a]{x} \cdot \sqrt[a]{y} = \sqrt[a]{x \cdot y}$ | $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$ |
| 2. División de radicales con el mismo índice. | $\sqrt[a]{x} : \sqrt[a]{y} = \frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}} = \sqrt[a]{\frac{x}{y}}$ | $\sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{2} = \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{2}$ |
| 3. Potencia de un radical. | $\sqrt[b]{x^{a \cdot b}} = (\sqrt[b]{x^a})^b = \sqrt[b]{x^{a \cdot b}}$ | $(\sqrt{2^5})^3 = \sqrt{2^{15}}$ |
| 4. Raíz de una raíz. | $\sqrt[a]{\sqrt[b]{x}} = \sqrt[a \cdot b]{x}$ | $\sqrt[4]{\sqrt{6}} = \sqrt[8]{6}$ |

Antes de pasar a las operaciones básicas con los radicales, es necesario conocer la **simplificación de radicales** que consiste básicamente en expresar el radicando como potencias y extraer todos los factores posibles. Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[5]{-192} = \sqrt[5]{-2^6 \cdot 3} = \sqrt[5]{-1} \cdot \sqrt[5]{2^6} \cdot \sqrt[5]{3} = -1 \cdot 2 \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = -2 \cdot \sqrt[5]{6}$$

$$\sqrt{32000} = \sqrt{2^8 \cdot 5^3} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{5^3} = 2^4 \cdot 5 \sqrt{5} = 80 \cdot \sqrt{5}$$

Además, para simplificar, en un último paso, debemos tener en cuenta que el índice y el exponente forman una fracción y éstas se pueden simplificar, es decir:

hacer el índice menos el exponente que tenía:

$$\sqrt[6]{3^7} = \frac{3^{\frac{7}{6}}}{6} = \frac{3^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{4}{6}}}{6} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{6}$$

Tengamos en cuenta que después de hacer la operación, se debe simplificar lo máximo posible.

TIPO 3: Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - 2}$$

Debemos tener en cuenta, además de todo lo anterior, las igualdades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

ACTIVIDAD 6: Racionaliza las siguientes expresiones:

$$\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{5-x}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{6}{5\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}+4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2^3 \cdot 3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{3-2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}+2\sqrt{7}}$$

$$\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

4. Conceptos de un polinomio. Factorización de polinomios.

Un *polinomio* es una expresión algebraica formada por la suma o resta de monomios, que se llaman términos del polinomio.

$$P(x) = -2x^3 - 10x^2 - 16x - 8$$

Valor numérico de un polinomio: es el valor que asigna el polinomio para un determinado valor de la variable.

$$\text{El valor numérico de } P(x) \text{ para } x=1 \text{ es: } P(1) = -2 \cdot (1)^3 - 10 \cdot (1)^2 - 16 \cdot (1) - 8 = -36$$

Raíz de un polinomio: es un valor de la variable para el cual, su valor numérico es cero.

$$P(-1) = -2 \cdot (-1)^3 - 10 \cdot (-1)^2 - 16 \cdot (-1) - 8 = 0 \text{ Por tanto, } x = -1 \text{ es raíz de } P(x)$$

Factor de un polinomio: es otro polinomio de menor grado de manera que al dividirlos, obtenemos una división exacta, es decir, resto cero. La expresión de un polinomio como producto de factores de menor grado posible se conoce con el nombre de **factorización**.

OBSERVACIÓN: Si $x=a$ es raíz del polinomio $P(x)$ entonces $x-a$ es un factor de dicho polinomio y viceversa.

La **REGLA DE RUFFINI** se utiliza para obtener las raíces de un polinomio y su factorización de la siguiente manera:

Obtener las raíces del siguiente polinomio así como su factorización:

$$P(x) = -2x^4 + 10x^2 - 8$$

Colocamos los coeficientes del polinomio, si alguno falta, se coloca un cero. Los candidatos a raíces de un polinomio son los divisores del término independiente y los válidos son aquellos cuyo resultado es cero.

Una vez colocados los coeficientes y decidido qué número elegimos pasamos a operar de la siguiente manera: el primer coeficiente se baja directamente y se multiplica por el número elegido, colocándose debajo del siguiente coeficiente con el cual tenemos que sumarlo. Este procedimiento se repite hasta llegar al último número. Si el resultado obtenido es cero, el número elegido es raíz del polinomio, si no sale cero debemos empezar con otro número de entre los candidatos.

	-2	0	10	0	-8	
-1						
	-2	0	10	0	-8	
-1		2	-2	-8	8	
	-2	2	8	-8		0
1		-2	0	8		
	-2	0	8		0	
-2		4	-8			
	-2	4		0		
2		-4				
	-2					
	-2					

Por tanto, obtenemos que las raíces del polinomio son $-1, 1, -2, 2$ y que su factorización es la siguiente:

$$P(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

OBSERVACIÓN: Tengamos en cuenta que el coeficiente principal siempre tiene que aparecer en la factorización.

En los polinomios es muy importante saber sacar factor común y las identidades o igualdades notables, pues nos simplifican mucho los cálculos:

Factor común:

$$x^2 - 2x = x \cdot (x - 2)$$

$$x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4)$$

$$15x^6 - 5x^4 + 10x^3 = 5x^3 \cdot (3x^3 - x + 2)$$

Identidades notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Para realizar la factorización de polinomios, debemos, en primer lugar, sacar factor común y después aplicar Ruffini al polinomio que me ha quedado. Veámoslo con un ejemplo:

$$P(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = -x \cdot (x^2 - 4x + 4) = -x \cdot (x - 2)^2$$

De esta manera las raíces también cambian, pues cada vez que se saque factor común en x , se está añadiendo la raíz $x=0$.

ACTIVIDAD 7: Dado los siguientes polinomios, obtén sus raíces y factorízalos:

$$P(x) = x^2 - 7x \quad Q(x) = 5x^2 + 10x \quad R(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$S(x) = x^3 + 8x^2 + 16x \quad T(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 \quad U(x) = -x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 4x$$

5. Fracciones algebraicas.

Las fracciones algebraicas simplemente son fracciones de polinomios. Y al igual que las fracciones de números, las fracciones algebraicas se pueden simplificar, sumar, restar,

multiplicar, dividir... Sólo hay que tener en cuenta que para todo ello es necesario factorizar los polinomios. Veámoslo con un ejemplo:

Simplificación:

$$\frac{x^2+x}{x^2-5x} = \frac{x \cdot (x+1)}{x \cdot (x-5)} = \frac{x+1}{x-5}$$

$$\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+1) \cdot (x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{x+1}{1}$$

Sumas y restas: para hacer estas operaciones es necesario calcular el m.c.m. de los denominadores y aplicar exactamente las mismas reglas que se hacen con las fracciones de números.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3) - x}{x \cdot (x+3)} = \frac{3}{x \cdot (x+3)}$$

$$\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x^2-4} = \frac{4 \cdot (x+2) + x}{x^2-4} = \frac{5x+8}{x^2-4}$$

Multiplicación y División:

Multiplicamos los polinomios en paralelos y en cruz, respectivamente.

$$\frac{x}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{x}{(x+3)^2} \cdot \frac{x+3}{x \cdot (x+1)} =$$

ACTIVIDAD 8: Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} \quad b) \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-2x^3-x^2+2x} \quad c) \frac{x^2+x}{x^2-x} \quad d) \frac{x^7-x^5}{x^7} \quad e) \frac{-x^4-2x^3-x^2}{-2x^3+2x}$$

ACTIVIDAD 9: Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \frac{3x}{x^2-4} - \frac{x+1}{-x^2+2x} + \frac{2}{x} = b) \left(\frac{2}{x+1} + \frac{x}{x-3} \right) : \frac{2}{x^3-2x^2-3x}$$

6. Resolución de ecuaciones de grado uno y dos.

Una ecuación es una igualdad que sólo se verifica para unos valores concretos de una variable, generalmente llamada x. Resolver una ecuación consiste en hallar los valores de la variable que hacen cierta la igualdad. La solución de una ecuación es un valor que verifica la ecuación, es decir, que al sustituir se verifica la igualdad.

Recuerda:

- Si un elemento está sumando en un miembro pasa al otro restando. Si está restando pasa sumado.
- Si un número multiplica a **todos** los elementos de un miembro pasa al otro dividiendo y si los divide pasa multiplicando.

Es importante recordar la jerarquía de operaciones:

1. M. C. M en caso que haya fracciones
2. Paréntesis
3. Potencias
4. Multiplicaciones y Divisiones
5. Sumas y Restas

Veamos ejemplos de **ecuaciones de primer grado**:

$$\frac{x+4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5-x}{2}$$

$$2+3 \cdot (2x+1) - 8 - 3 \cdot (x+4) = 6$$

$$2+6x+3-8-3x-12=6$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot (x+4) - 3 &= 3 \cdot (5-x) \\
2x+8-3 &= 15-3x \\
2x+3x &= 15-8+3 \\
5x &= 10 \\
x &= \frac{10}{5} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6x-3x &= 6+12+8-3-2 \\
3x &= 20 \\
x &= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Para resolver **las ecuaciones de segundo grado** es necesario recurrir a una fórmula que nos da las soluciones de estas ecuaciones:

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Veamos cómo es la aplicación de esta fórmula en ejemplos: $2x^2-4x-6=0$

$$a=2; b=-4; c=-6 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{array} \right.$$

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones en las que intervienen las potencias pares dos y cuatro. Para resolverlas seguiremos los siguientes pasos:

1º Realizamos un cambio de variable para obtener una ecuación de segundo grado.	$-2x^4+6x^2+8=0$ <i>Cambio:</i> $x^2=t$ <i>por tanto, se tiene también:</i> $x^4=t^2$ $-2t^2+6t+8=0$
2º Resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida con variable t.	$-2t^2+6t+8=0$ Tenemos dos soluciones : $t_1=4$ y $t_2=-1$
3º Deshacemos el cambio de variable para obtener las soluciones en la variable x.	$x^2=t_1=4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ $x^2=t_2=-1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ solución Obtenemos dos soluciones $x_1=2$ y $x_2=-2$

ACTIVIDAD 10: Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$x^2-4x+4=0 \quad x=x^2+4-4x \quad x^2+x-2=4 \quad x^2+16+16x \quad x^2-x-1=x^2+1-2x$$

$$x^3+4x^2+3x=0 \quad x^4+3x^2-4=0 \quad x^4+5x^2+6=0$$

7. Sistemas de ecuaciones.

Existen tres métodos analíticos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales: MÉTODO DE REDUCCIÓN, METODO DE SUSTITUCIÓN Y METODO DE IGUALACIÓN. Cada uno tiene su diferencia en la ejecución que veremos con un ejemplo:

MÉTODO DE REDUCCIÓN: Se multiplican las ecuaciones lineales por escalares de manera que al sumar las ecuaciones una variable desaparezca, quedando una variable que se puede calcular fácilmente. Una vez conocido el valor de una de ellas, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra variable.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: De cualquiera de las dos ecuaciones lineales se despeja una variable, cuya expresión se sustituye en la otra ecuación lineal. De esta forma se obtiene una ecuación de primer grado que se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Una

vez conocido el valor de una de ellas, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra variable.

MÉTODO DE IGUALACIÓN: De las dos ecuaciones lineales se despeja la misma variable, igualándose las expresiones de despeje. Se resuelve la ecuación de primer grado que obtenemos y una vez conocido el valor de una de ellas, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra variable.

ACTIVIDAD 11: Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más apropiado:

$$a) \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$