

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El árbol de la ciencia

Al decir Andrés [estudiante de medicina] que la vida, según su profesor Letamendi, es una función indeterminada entre la energía individual y el cosmos, y que esta función no puede ser más que suma, resta, multiplicación y división, y que no pudiendo ser suma, ni resta, ni división, tiene que ser multiplicación, uno de los amigos de Sañudo [estudiante de ingeniería] se echó a reír.

–¿Por qué se ríe usted? –le preguntó Andrés sorprendido.

–Porque en todo eso que dice usted hay una porción de sofismas y de falsedades. Primeramente hay muchas más funciones matemáticas que sumar, restar, multiplicar y dividir.

–¿Cuáles?

–Eleva a potencia, extraer raíces... Después, aunque no hubiera más que cuatro funciones matemáticas primitivas, es absurdo pensar que en el conflicto de estos dos elementos, la energía de la vida y el cosmos, uno de ellos, por lo menos, heterogéneo y complicado, porque no haya suma, ni resta, ni división, ha de haber multiplicación. Además, sería necesario demostrar por qué no puede haber suma, por qué no puede haber resta y por qué no puede haber división. Después habría que demostrar por qué no puede haber dos o tres funciones simultáneas. No basta decirlo.

–Pero eso lo da el razonamiento.

–No, no; perdone usted –replicó el estudiante–. Por ejemplo, entre esa mujer y yo puede haber varias funciones matemáticas: suma, si hacemos los dos una misma cosa ayudándonos; resta, si ella quiere una cosa y yo la contraria y vence uno de los dos contra el otro; multiplicación, si tenemos un hijo, y división si yo la corto en pedazos a ella o ella a mí.

–Eso es una broma –dijo Andrés.

–Claro que es una broma –replicó el estudiante–, una broma por el estilo de las de su profesor; pero que tiende a una verdad, y es que entre la fuerza de la vida y el cosmos hay un infinito de funciones distintas: sumas, restas, multiplicaciones, de todo, y que además es muy posible que existan otras funciones que no tengan expresión matemática.

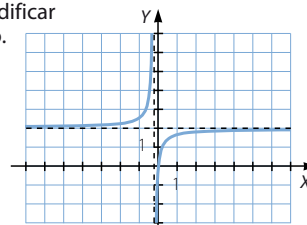
PIO BAROJA

Existen algunas proteínas de gran tamaño a las que se les pueden unir hormonas para modificar su función en el cuerpo humano.

Este mecanismo está regulado por la fórmula

$$y = \frac{10kx}{1 + kx}$$

siendo y la concentración de hormonas unidas, la concentración total de hormonas y k una constante. Representa esta función para $k = 1$.



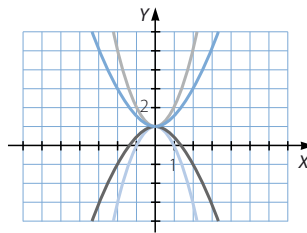
ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

- 001 Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(-2, 3)$.

$$m = -\frac{1}{2}$$

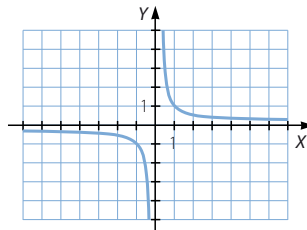
- 002 Dibuja sobre unos ejes de coordenadas algunas parábolas que tengan como vértice el punto $(0, 1)$.

Respuesta abierta.



- 003 Dibuja, sobre unos ejes de coordenadas, una hipérbola de vértices $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y con asíntotas $y = 0$ y $x = 0$.

Respuesta abierta.



- 004 Calcula las siguientes razones trigonométricas.

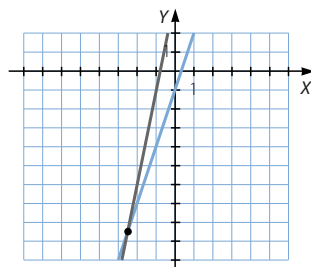
a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ b) $\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3}$ c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ d) $\operatorname{sen} \frac{10\pi}{6}$ e) $\operatorname{cos} \frac{9\pi}{4}$ f) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$

a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ no existe. e) $\operatorname{cos} \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\operatorname{cos} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ d) $\operatorname{sen} \frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{2}$ no existe.

ACTIVIDADES

- 001 Representa, sobre los mismos ejes de coordenadas, las funciones $y = 3x - 1$ e $y = 5x + 4$. Halla el punto común a las dos gráficas.



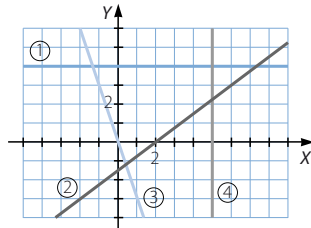
El punto de intersección es:

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

Funciones elementales

- 002 Dibuja todos los tipos de rectas que conoces y encuentra aquellos que no corresponden a una función. Escribe sus ecuaciones.

Respuesta abierta.



- ① $y = 4$ es una función constante.
 ② $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ es una función afín.
 ③ $y = -3x$ es una función lineal.
 ④ $x = 4$ no es una función.

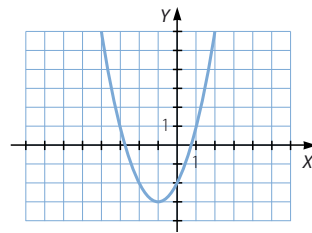
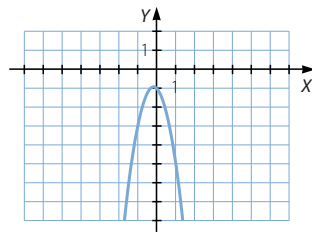
- 003 Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = -3x^2 - x - 1$

b) $y = x^2 + 2x - 2$

a) $V\left(-\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$

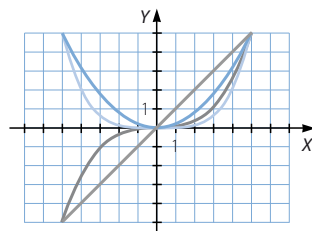
b) $V(-1, -3)$



- 004 Representa en el intervalo $[-1, 1]$, con una escala que sea lo suficientemente grande, las funciones.

$f(x) = x$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^4$

Describe sus propiedades.



En todas las funciones, el dominio es \mathbb{R} y el punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas.

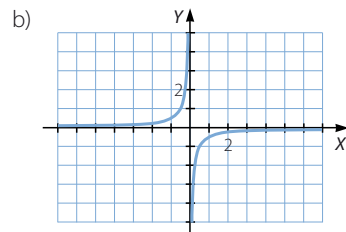
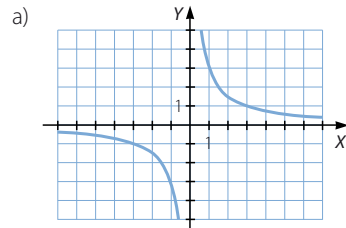
Las funciones de exponente par son decrecientes para los valores negativos de x , son crecientes para los valores positivos, tienen un máximo absoluto en $x = 0$ y son simétricas respecto del eje de ordenadas.

Las funciones de exponente impar son crecientes, no tienen máximos ni mínimos y son simétricas respecto del origen de coordenadas.

005 Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{3}{x}$

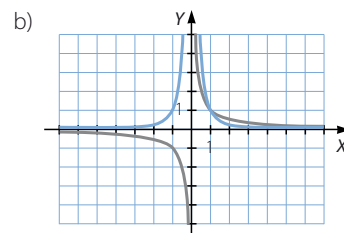
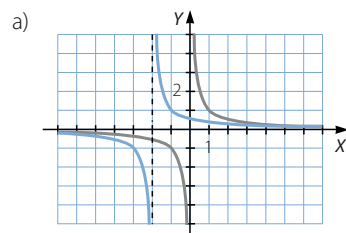
b) $y = -\frac{1}{2x}$



006 Representa estas funciones racionales, y relacionalas con las funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \frac{1}{x+2}$

b) $y = \frac{1}{x^2}$



Es una traslación horizontal de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x+2) = \frac{1}{x+2}$$

Es el producto por sí misma de la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x^2}$$

007 Halla el dominio de las funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 36}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } g = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

Funciones elementales

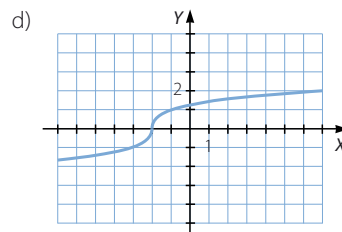
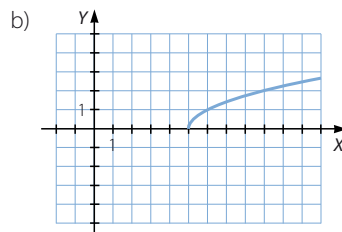
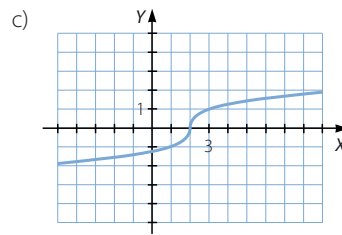
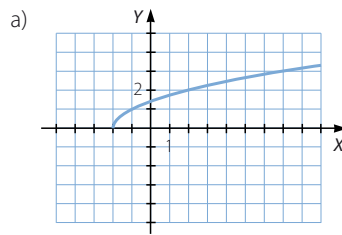
008 Representa gráficamente estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

d) $i(x) = \sqrt[3]{x + 2}$



009 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

a) $f(x) = 1,2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $h(x) = 0,8^x$

d) $i(x) = (\sqrt{3})^x$

a) $1,2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

b) $\frac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

c) $0,8 < 1 \rightarrow h(x)$ es decreciente.

d) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow i(x)$ es creciente.

010 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -2^x$

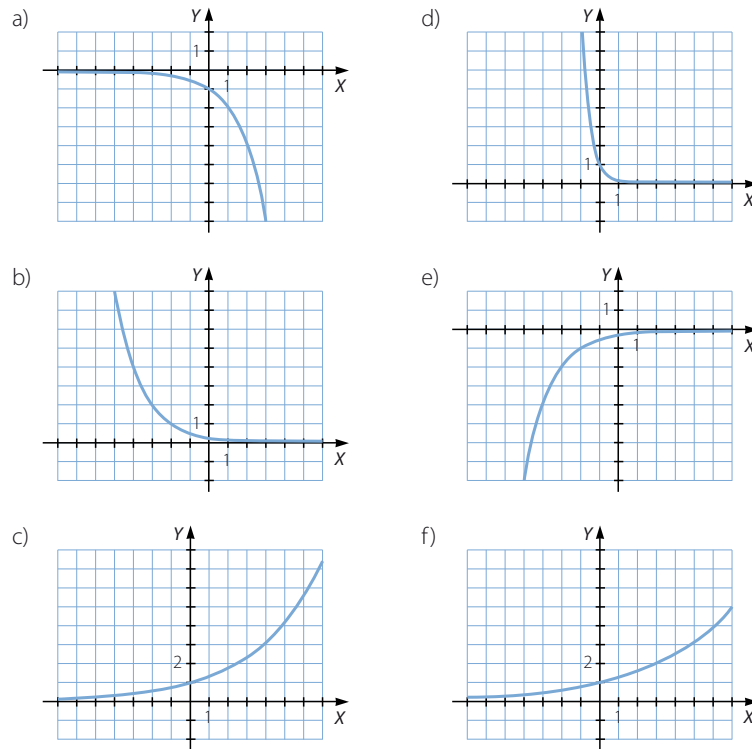
c) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

e) $y = -2^{-x}$

b) $y = 2^{-x}$

d) $y = 0,1^x$

f) $y = 2^{\frac{x}{3}}$



011 Razona, sin hacer la gráfica, si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

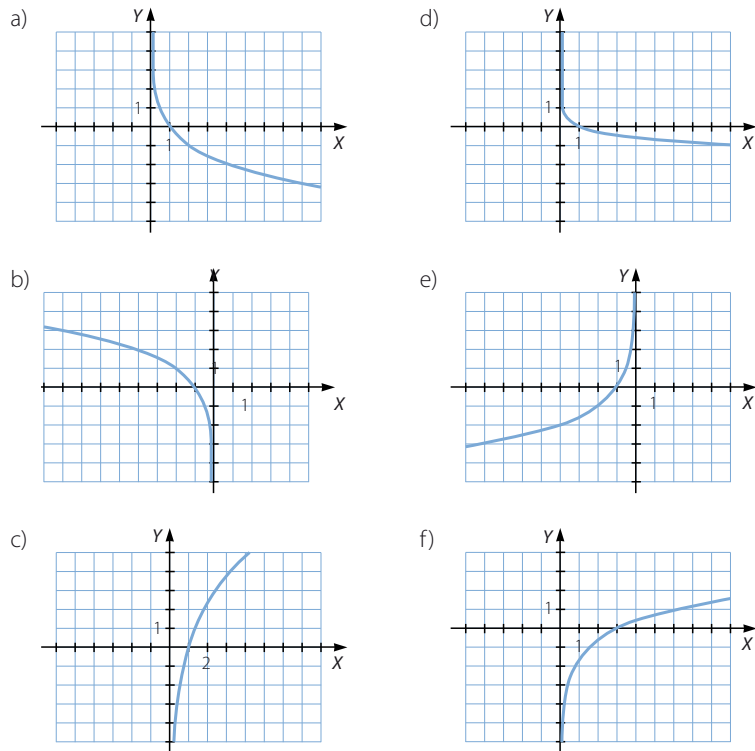
- a) $f(x) = \log_{1,2} x$ c) $h(x) = \log_7 x$ e) $j(x) = \log_{\sqrt{3}} x$
 b) $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ d) $i(x) = \log_{0,8} x$ f) $k(x) = \log_{8,2} x$

- a) $1,2 > 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.
 b) $\frac{2}{3} < 1 \rightarrow g(x)$ es decreciente.
 c) $7 > 1 \rightarrow h(x)$ es creciente.
 d) $0,8 < 1 \rightarrow i(x)$ es decreciente.
 e) $\sqrt{3} > 1 \rightarrow j(x)$ es creciente.
 f) $8,2 > 1 \rightarrow k(x)$ es creciente.

012 Representa gráficamente estas funciones.

- a) $y = -\log_2 x$ c) $y = \log_{\frac{4}{3}} x$ e) $y = -\log_2 (-x)$
 b) $y = \log_2 (-x)$ d) $y = \log_{0,1} x$ f) $y = \log_2 \left(\frac{x}{3} \right)$

Funciones elementales



013 Describe las características de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}(x - 1)$

b) $g(x) = (\text{sen } x) - 1$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im } f = [-1, 1]$

La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = 1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = 1 + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ $\text{Im } g = [-2, 0]$

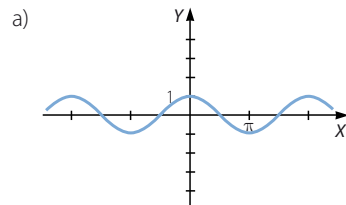
La función es periódica, de período 2π radianes. No es simétrica.

Presenta máximos en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y mínimos en $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

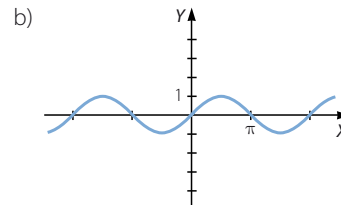
014 Representa las funciones y di qué observas.

a) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



$$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$$

015 Describe las características de estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $g(x) = \operatorname{tg}(x + 1)$

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y simétrica respecto del origen de coordenadas.

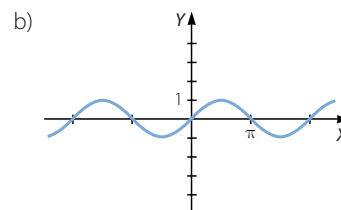
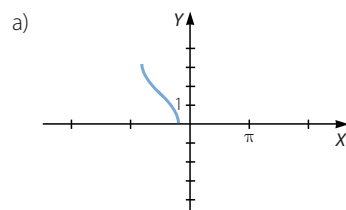
b) $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$

La función es periódica, de período π radianes.

Es siempre creciente y no es simétrica.

016 Representa las funciones inversas.

a) $f(x) = \operatorname{arc} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $g(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x - \pi)$



017 Representa gráficamente esta función definida a trozos.

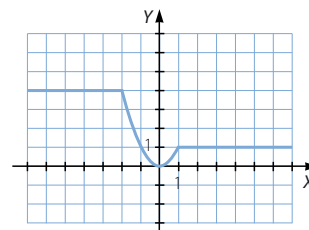
$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Describe sus principales características.

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ $\operatorname{Im} f = [0, 4]$

La función es continua, no es periódica ni simétrica.

Es decreciente en $(-2, 0)$ y es creciente en $(0, 1)$. Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

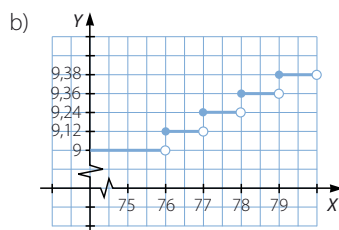


Funciones elementales

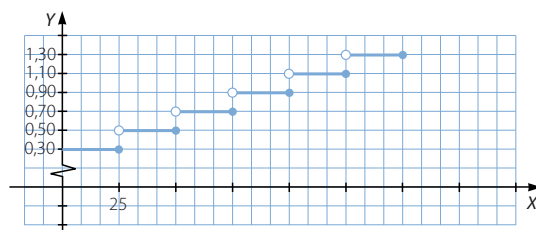
018 En un contrato mensual de telefonía móvil se factura a 0,12 € por minuto. Si el consumo no llega a 9 €, entonces se abona esa cantidad.

- a) Halla la expresión de la función que relaciona el consumo, en minutos, y el importe de la factura mensual, en euros.
b) Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} 9 & \text{si } 0 \leq x < 76 \\ 9,12 & \text{si } 76 \leq x < 77 \\ 9,24 & \text{si } 77 \leq x < 78 \\ 9,36 & \text{si } 78 \leq x < 79 \\ 9,38 & \text{si } 79 \leq x < 80 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



019 El servicio de correos cobra 0,30 € por los primeros 25 g de envío y, a partir de esa cantidad, cobra 0,20 € por cada 25 g (o fracción) de peso extra. Representa la gráfica del coste del envío de cartas hasta 150 g.



020 La función que asocia a cada número su parte decimal es:

$$f(x) = x - [x]$$

Representa la función y analiza sus propiedades.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

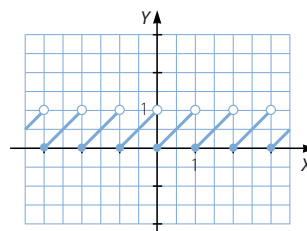
$$\text{Im } f = [0, 1)$$

La función no es continua. Todos los números enteros son puntos de discontinuidad inevitable de salto finito.

Es periódica, de período 1. No es simétrica.

Es creciente en $(k, k + 1)$, siendo $k \in \mathbb{Z}$.

No tiene máximos ni mínimos.



021
•○○

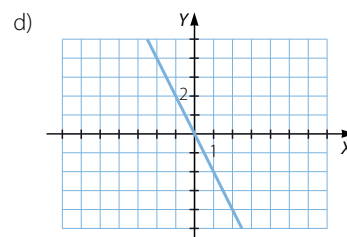
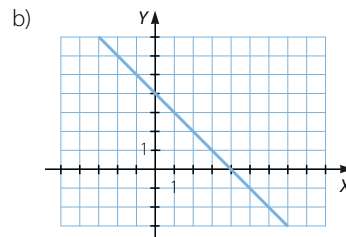
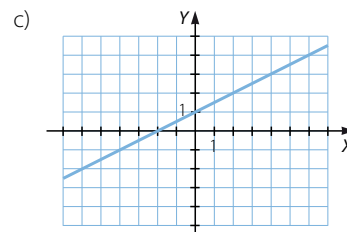
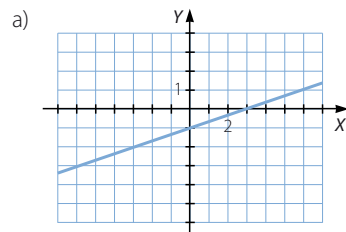
Representa, sin hacer las tablas de valores correspondientes, las funciones lineales y afines.

a) $y = \frac{x - 3}{3}$

b) $y = -x + 4$

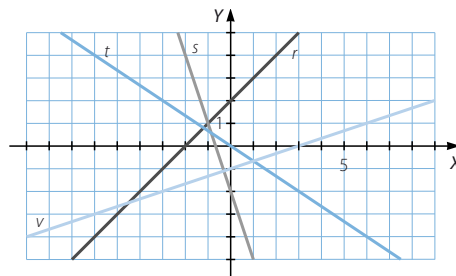
c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

d) $y = -2x$



022
•○○

Escribe la expresión algebraica de las funciones representadas, y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.



r: $y = x + 2$

s: $y = -3x - 2$

t: $y = -\frac{2}{3}x$

u: $y = \frac{1}{3}x - 1$

$m = 1$

$m = -3$

$m = -\frac{2}{3}$

$m = \frac{1}{3}$

$n = 2$

$n = -2$

$n = 0$

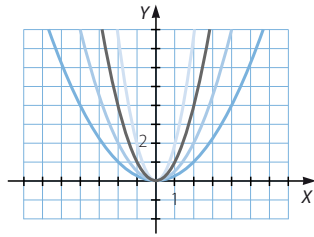
$n = -1$

Funciones elementales

023
•○○

Representa las funciones en los mismos ejes de coordenadas, y relaciona la abertura de las ramas de cada parábola con el coeficiente de x^2 .

a) $y = x^2$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$ c) $y = 2x^2$ d) $y = \frac{1}{4}x^2$



La abertura es menor cuando el coeficiente es mayor.

024
•○○

Halla los vértices y los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b) $g(x) = -2x^2 + x - 1$ c) $h(x) = -x^2 - 2$

a) $V(1, 1)$

No tiene puntos de corte con el eje X . Punto de corte con el eje Y : $(0, 2)$

b) $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$

No tiene puntos de corte con el eje X . Punto de corte con el eje Y : $(0, -1)$

c) $V(0, -2)$

No tiene puntos de corte con el eje X . Punto de corte con el eje Y : $(0, -2)$

025
•○○

Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 3x$

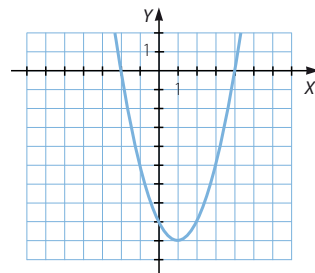
c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

a) $V(1, -9)$

Puntos de corte con el eje X : $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

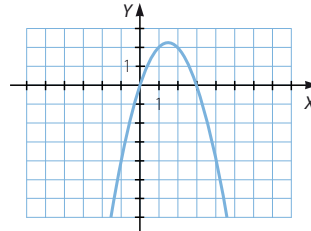
Punto de corte con el eje Y : $(0, -8)$



b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos de corte con el eje X: (0, 0) y (3, 0)

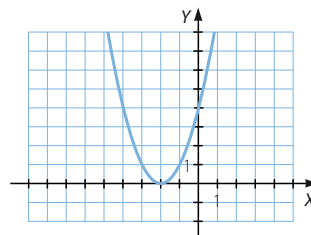
Punto de corte con el eje Y: (0, 0)



c) $V(-2, 0)$

Punto de corte con el eje X: (-2, 0)

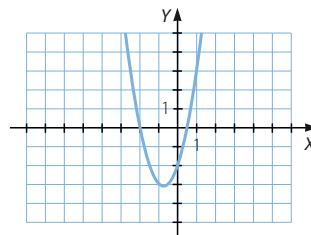
Punto de corte con el eje Y: (0, 4)



d) $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Puntos de corte con el eje X: (-2, 0) y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: (0, -2)



026
●○○

Representa la función $y = x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de estas funciones polinómicas.

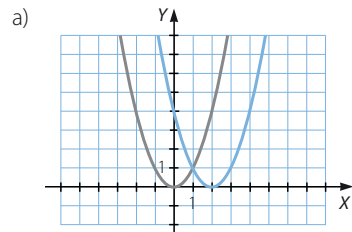
a) $y = (x - 2)^2$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = (x + 3)^2$

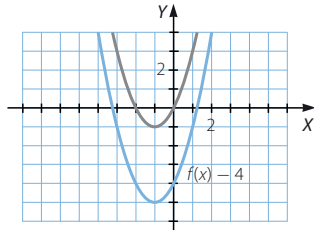
d) $y = x^2 - 4$

¿Qué relación guardan las gráficas de las últimas cuatro funciones con la gráfica de la primera?

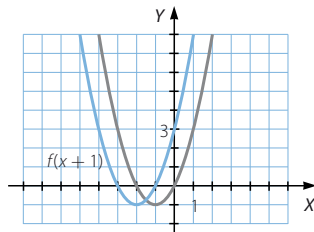


La función se traslada horizontalmente 2 unidades a la derecha.

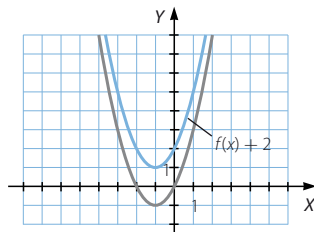
b) $f(x) - 4 = x^2 + 2x - 4$



c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3$



d) $f(x) + 2 = x^2 + 2x + 2$



028



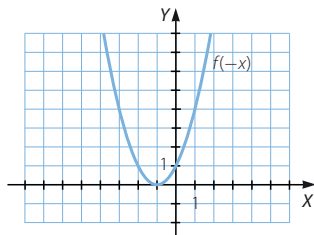
Considera las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad g(x) = (x - 1)^2 \quad h(x) = 3x$$

Calcula la expresión algebraica de la función que se indica en cada apartado, y represéntala gráficamente.

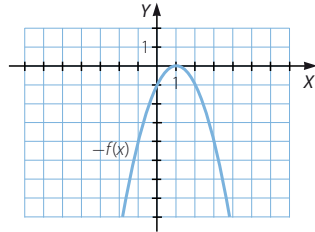
- a) $f(-x)$ c) $g(-x)$ e) $h(-x)$
 b) $-f(x)$ d) $-g(x)$ f) $-h(x)$

a) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$

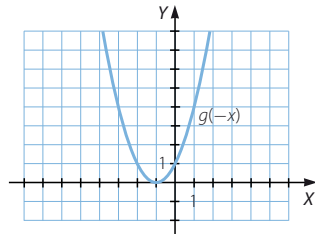


Funciones elementales

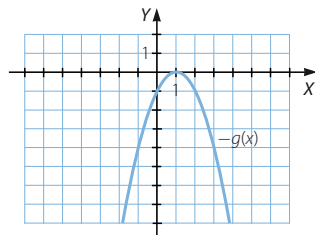
b) $-f(x) = -x^2 + 2x - 1$



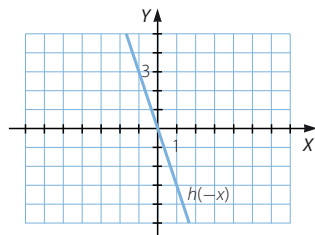
c) $g(-x) = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1$



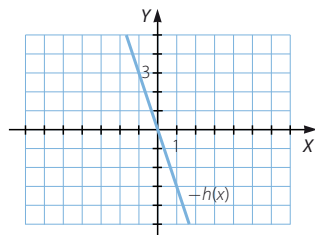
d) $-g(x) = -(x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$



e) $h(-x) = 3(-x) = -3x$



f) $-h(x) = -3x$



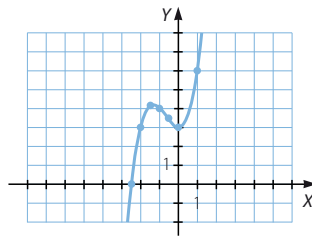
029

Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de las funciones.

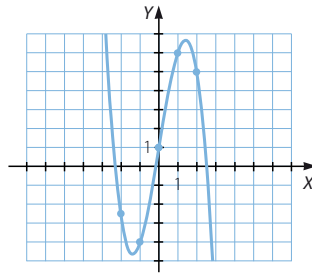
a) $y = x^3 + 2x^2 + 3$

b) $y = -x^3 + 6x + 1$

a)	x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2
	f(x)	-0,125	3	4,125	4	3,375	3	6	19



b)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	f(x)	10	-3	-4	1	6	5	-8



030

Halla los puntos donde cortan las siguientes funciones polinómicas al eje X.

a) $y = 3x + 9$

d) $y = 8x^2 + 10x - 3$

b) $y = -2x + 5$

e) $y = 2x^2 + x + 3$

c) $y = 6x^2 + 17x - 3$

a) $x = -3$

d) $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{2}$

b) $x = \frac{5}{2}$

e) No tiene puntos de corte.

c) $x = -3, x = \frac{1}{6}$

031

Halla los puntos donde estas funciones cortan al eje X.

a) $y = (x - 1)(x + 2)$

b) $y = (2x - 1)^2$

c) $y = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$

a) $x = 1, x = -2$

b) $x = \frac{1}{2}$

c) $x = 2, x = -3, x = -\frac{1}{2}$

Funciones elementales

032
●●○

Representa las siguientes funciones polinómicas, indicando los puntos de corte con los ejes.

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$

d) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

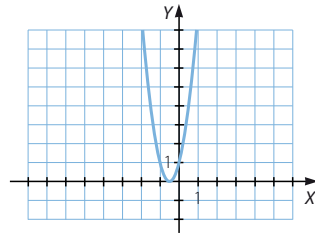
b) $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$

e) $y = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

c) $y = 2x^3 - 9x^2 + x + 12$

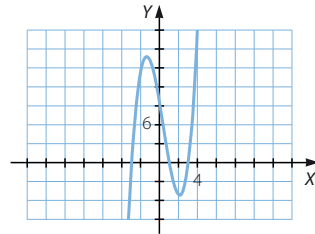
a) Punto de corte con el eje X: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: (0, 1)



b) Puntos de corte con el eje X:
(-3, 0), (1, 0) y (3, 0)

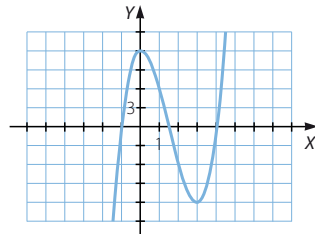
Punto de corte con el eje Y: (0, 9)



c) Puntos de corte con el eje X:

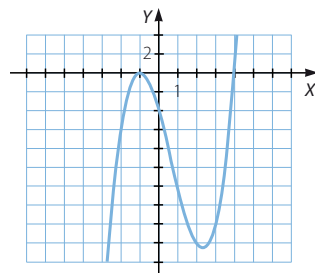
$(-1, 0), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y (4, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 12)



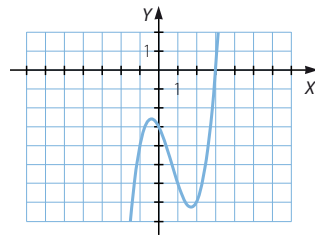
d) Puntos de corte con el eje X: (-1, 0) y (4, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 4)



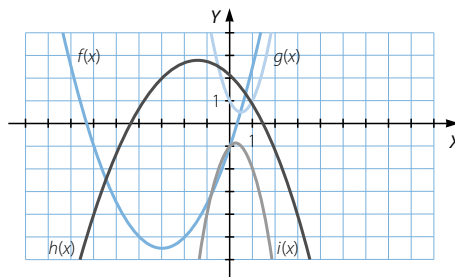
e) Punto de corte con el eje X: (3, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, -3)



033 ●●○ Relaciona cada gráfica con su expresión algebraica.

a) $y = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$ c) $y = -\frac{x^2}{3} - x + 2$
 b) $y = 2x^2 - 2x + 1$ d) $y = -2x^2 + x + 1$



- a) $y = f(x)$, porque si $a = \frac{1}{2} > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = -1$.
 b) $y = h(x)$, pues si $a = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba y $c = 1$.
 c) $y = g(x)$, porque si $a = -\frac{1}{3} < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = 2$.
 d) $y = i(x)$, ya que si $a = -2 < 0$, la parábola es abierta hacia abajo y $c = -1$.

034 ●●○ Representa funciones de la forma $y = ax^2 - 3x + 2$ con distintos valores de a , y estudia su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

Si $a = 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$

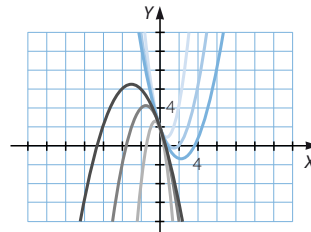
Si $a = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

Si $a = -1 \rightarrow i(x) = -x^2 - 3x + 2$

Si $a = -3 \rightarrow j(x) = -3x^2 - 3x + 2$

La abertura de las parábolas es menor cuanto mayor es el valor absoluto de a .



035 ●●○ Representa funciones de la forma $y = x^2 + bx + 2$ con distintos valores de b , y explica cómo varían en función del parámetro.

Respuesta abierta.

Si $b = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + x + 2$

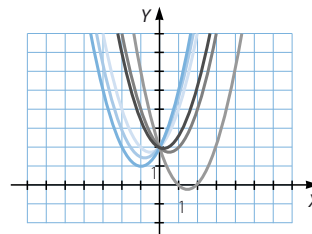
Si $b = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

Si $b = -\frac{1}{2} \rightarrow h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Si $b = -1 \rightarrow i(x) = x^2 - x + 2$

Si $b = -3 \rightarrow j(x) = x^2 - 3x + 2$

La abertura de las parábolas es mayor cuanto mayor es el valor absoluto de b .



Funciones elementales

036



Representa funciones de la forma $y = x^2 + 2x + c$ con distintos valores de c , y analiza su variación en función del parámetro.

Respuesta abierta.

Si $c = 1 \rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1$

Si $c = \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

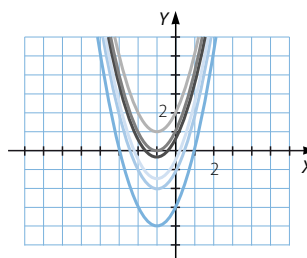
Si $c = 2 \rightarrow h(x) = x^2 + 2x + 2$

Si $c = -\frac{1}{2} \rightarrow i(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

Si $c = -1 \rightarrow j(x) = x^2 + 2x - 1$

Si $c = -3 \rightarrow k(x) = x^2 + 2x - 3$

Todas las parábolas tienen la misma abertura. Se trasladan verticalmente, hacia arriba si c es positivo, y hacia abajo si c es negativo.



037



Escribe funciones con las siguientes características.

- Una parábola que corte al eje X en $x = 3$ y $x = 5$.
- Una parábola que corte al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.
- Una parábola que corte dos veces al eje X en $x = 2$.
- Una función cúbica que corte al eje X en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.
- Una función cúbica que corte al eje X dos veces en $x = 2$ y una vez en $x = -1$.
- Una función cúbica que corte una vez al eje X en $x = 5$.
- Una función polinómica de cuarto grado que corte al eje X en $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.
- Una función de cuarto grado que solo corte dos veces al eje de abscisas, en $x = -2$ y en $x = 5$.

Respuesta abierta.

a) $y = (x - 3)(x - 5)$

e) $y = (x - 2)^2(x + 1)$

b) $y = (x + 2)(x - 1)$

f) $y = (x - 5)^3$

c) $y = (x - 2)^2$

g) $y = (x + 1)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

d) $y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

h) $y = (x + 2)^2(x - 5)^2$

038



Explica las diferentes situaciones que pueden producirse al determinar dónde corta al eje X una función polinómica de cuarto grado.

Para determinar los puntos de corte con el eje X se iguala la expresión de la función a cero. Entonces se obtiene una ecuación polinómica de cuarto grado que puede tener como máximo cuatro soluciones. Por tanto, la función puede no cortar el eje, o cortarlo una, dos, tres o cuatro veces, según el número de raíces del polinomio.

039

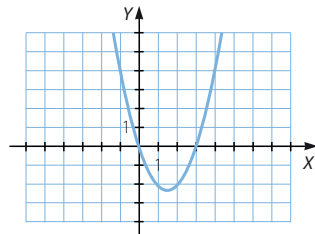
Obtén la expresión algebraica y representa la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1, -2)$, $B(2, -2)$ y $C(3, 0)$.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \\ 8a + 2b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \\ 2a = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

La expresión de la función es: $f(x) = x^2 - 3x$



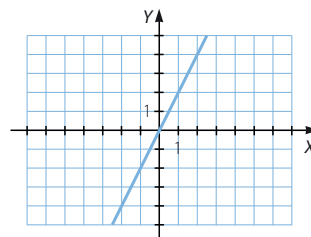
040

Halla y representa las funciones polinómicas de grado mínimo que pasan por los siguientes puntos.

- a) $A(0, 0)$, $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$ y $C(-2, -1)$ d) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(3, 0)$ y $D(4, 1)$
 b) $A(-1, 0)$, $B(0, -1)$ y $C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e) $A(-2, 3)$, $B\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $C(2, 2)$
 c) $A(3, 0)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 0)$ f) $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ y $C(4, -3)$

a) Los puntos A, B y C están alineados.

La función que pasa por ellos es:
 $f(x) = 2x$



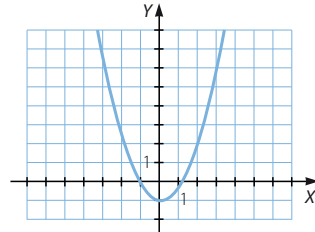
b) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -1 \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Funciones elementales

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - 1$$

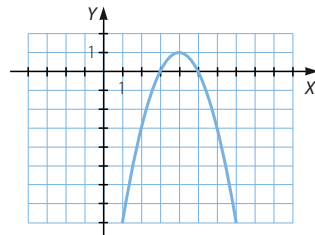


c) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 16a + 2b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ 7a + b = 1 \\ 2a = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -15 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = -x^2 + 8x - 15$$



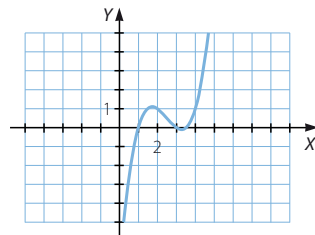
d) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 13a + 4b + c = 0 \\ 63a + 15b + 3c = 1 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -1 \\ 21a + 3b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 7a + 3b + c = 1 \\ 6a + b = -1 \\ 3a = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = -5 \\ c = \frac{34}{3} \\ d = -7 \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{34}{3}x - 7$$

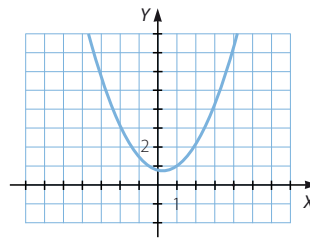


e) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 3 \\ \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{3}{2} \\ 4a + 2b + c = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = 3 \\ 8a + 12b + 18c = 27 \\ 4b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 8a + 2c = 5 \\ 8a + 18c = 30 \\ b = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{15}{64} \\ c = \frac{25}{16} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \frac{15}{64}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{25}{16}$$

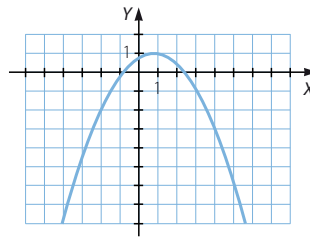


f) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} 4a - 2b + c = -2 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 3a - 3b = -3 \\ 15a + 3b = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ a - b = -1 \\ 18a = -7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -\frac{7}{18} \\ b = \frac{11}{18} \\ c = \frac{7}{9} \end{array}$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{7}{9}$$



041
•••

¿Cuál es el dominio de estas funciones racionales?

a) $f(x) = \frac{7}{(x+7)(x-4)}$

b) $g(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-10}$

a) $\mathbb{R} - \{-7, 4\}$

b) $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$

042
•••

Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, determina la expresión algebraica

de las siguientes funciones.

a) $g(x) = f(x-3)$

c) $g(x) = f(x) - 2$

e) $g(x) = f(-x)$

b) $g(x) = f(x+1)$

d) $g(x) = f(x) + 3$

f) $g(x) = -f(x)$

a) $g(x) = \frac{2}{x-3}$

c) $g(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2-2x}{x}$

e) $g(x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x}$

b) $g(x) = \frac{2}{x+1}$

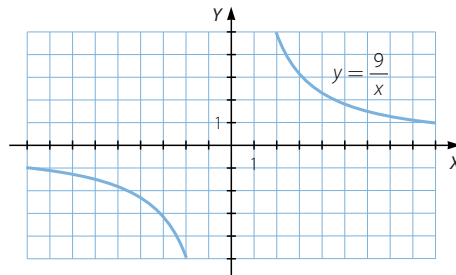
d) $g(x) = \frac{2}{x} + 3 = \frac{2+3x}{x}$

f) $g(x) = -\frac{2}{x}$

Funciones elementales

043
●●○

Observa la gráfica de la función $y = \frac{9}{x}$.



Representa las siguientes funciones.

a) $y = \frac{9}{x-3}$

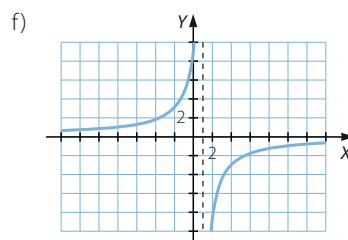
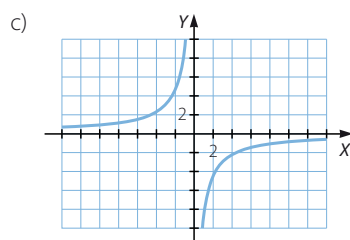
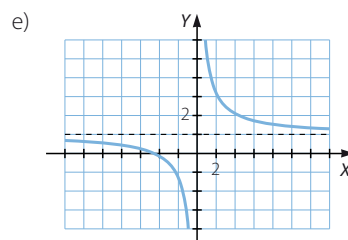
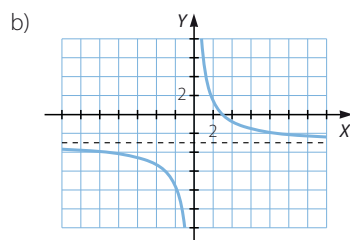
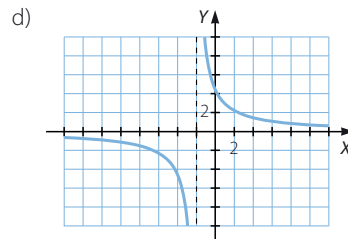
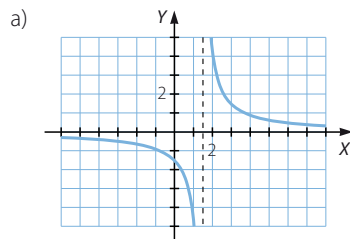
c) $y = -\frac{9}{x}$

e) $y = \frac{9}{x} + 2$

b) $y = \frac{9}{x} - 3$

d) $y = \frac{9}{x+2}$

f) $y = -\frac{9}{x-1}$



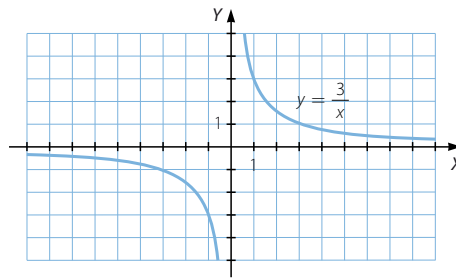
044 Sin representarlas, escribe la relación que hay entre las gráficas de estas funciones

y la de $y = \frac{12}{x}$.

a) $y = \frac{12}{x+4}$ b) $y = \frac{12}{x} - 2$ c) $y = \frac{12}{x} + 1$ d) $y = -\frac{12}{x}$

- a) La función se desplaza horizontalmente 4 unidades a la izquierda.
- b) La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
- c) La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
- d) La función es simétrica a la inicial y el eje de simetría es el eje de ordenadas.

045 La gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ es:



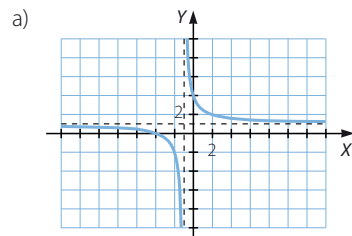
Encuentra la relación que tienen estas funciones con la función $y = \frac{3}{x}$ y represéntalas.

a) $y = \frac{x+4}{x+1}$. Ten en cuenta que: $y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$.

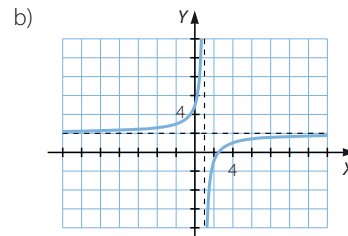
b) $y = \frac{2x-5}{x-1}$

c) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$

d) $y = \frac{-x-5}{x+2}$

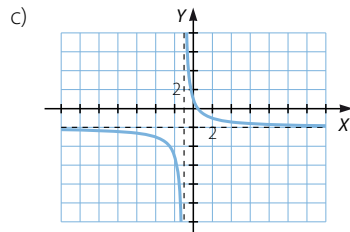


$$y = \frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1}$$

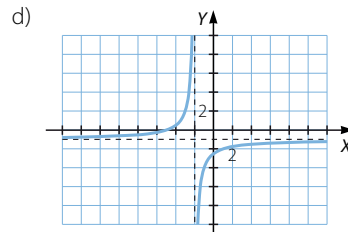


$$y = \frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$$

Funciones elementales



$$y = \frac{-2x + 1}{x + 1} = \frac{3}{x + 1} - 2$$



$$y = \frac{-x - 5}{x + 2} = -1 - \frac{3}{x + 2}$$

046
•••

Determina el dominio de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x} + 7$

c) $h(x) = \sqrt{x + 7}$

b) $g(x) = -\sqrt{x} + 5$

d) $i(x) = -\sqrt{x + 5}$

a) Dom $f = [0, +\infty)$

c) Dom $h = [-7, +\infty)$

b) Dom $g = [0, +\infty)$

d) Dom $i = [-5, +\infty)$

047
•••

Halla el dominio de las siguientes funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^4 - 81}$

c) $h(x) = \sqrt[4]{1 - x^3}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

c) Dom $h = (-\infty, -1]$

048
•••

¿Cuál es el dominio de estas funciones con radicales?

a) $f(x) = \frac{7x}{2 - \sqrt{x - 5}}$

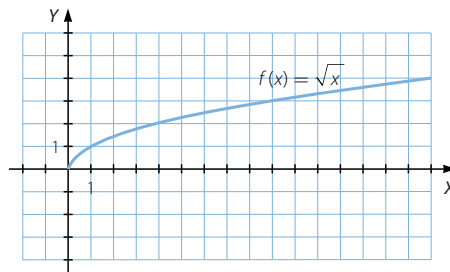
b) $g(x) = \frac{\sqrt{3x - 1}}{4 - \sqrt{x + 1}}$

a) Dom $f = [5, 9) \cup (9, +\infty)$

b) Dom $g = [-1, 15) \cup (15, +\infty)$

049
•••

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es:



Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

a) $f(x - 2)$

c) $1 + f(x)$

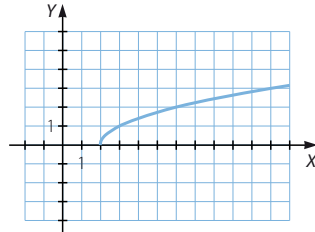
e) $-1 - f(x)$

b) $f(x + 3)$

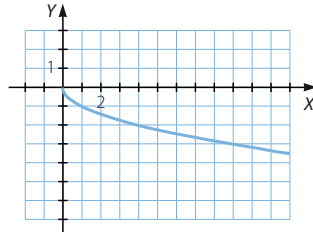
d) $-f(x)$

f) $f(x) - 2$

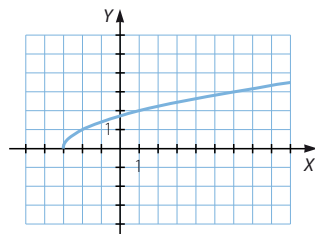
a) $f(x - 2) = \sqrt{x - 2}$



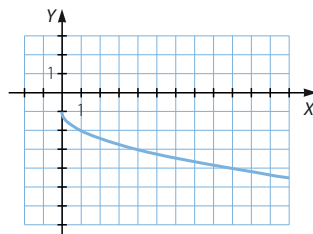
d) $-f(x) = -\sqrt{x}$



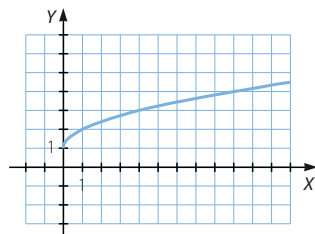
b) $f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$



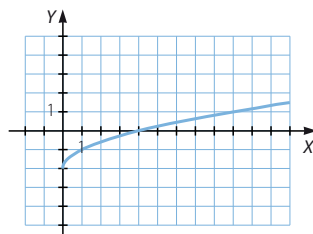
e) $-1 - f(x) = -1 - \sqrt{x}$



c) $1 + f(x) = 1 + \sqrt{x}$



f) $f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$



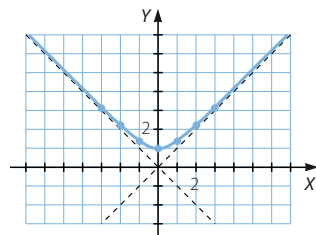
050

Con ayuda de la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Determina su dominio y su recorrido.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2,23	1,41	1	1,41	2,23

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [1, +\infty)$



Funciones elementales

051
●●○

A partir de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones con radicales.

a) $y = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $y = 1 - \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + 1}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

- La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba.
- La función se desplaza verticalmente 2 unidades hacia abajo.
- La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia abajo.
- La función se desplaza verticalmente 1 unidad hacia arriba y se dibuja abierta hacia abajo con la misma abertura.

052
●●○

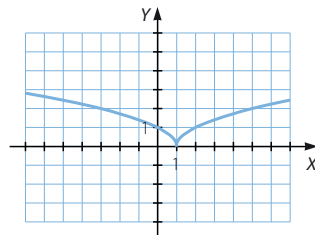
Calcula el dominio de estas funciones.

a) $y = \sqrt[4]{(x-1)^2}$

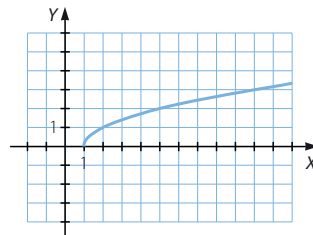
b) $y = \sqrt{x-1}$

Utiliza el resultado para probar que las funciones no son iguales y represéntalas gráficamente.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$



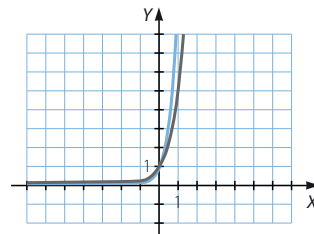
b) $\text{Dom } f = [1, +\infty)$



053
●●○

Representa la gráfica de las funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$. A partir de ellas, razona cómo será la gráfica de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$.

Las gráficas de las funciones $y = 5^x$ e $y = 10^x$ también son crecientes y pasan por el punto $(0, 1)$, pero su crecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto mayor es el valor de la base.

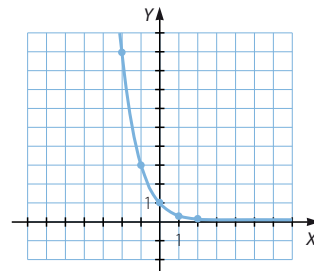


054
●●○

Ayúdate de la calculadora y realiza una tabla de valores para representar

la función exponencial $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

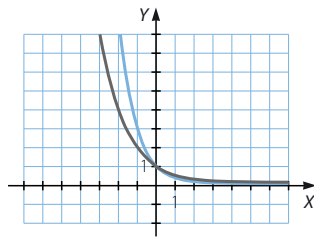
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	3	1	0,33	0,11



055

Representa las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. A partir de las gráficas,

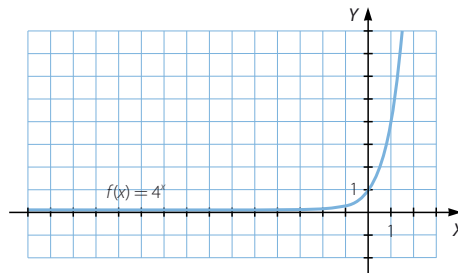
¿cómo serán las gráficas de las funciones $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$?



Las gráficas de las funciones $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ también son decrecientes y pasan por el punto $(0, 1)$, pero su decrecimiento es más lento si $x < 0$, y es más rápido si $x > 0$, cuanto menor es el valor de la base.

056

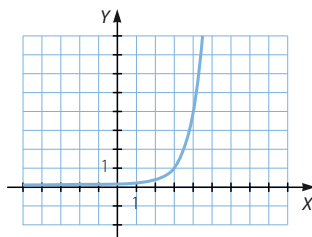
Esta es la gráfica de la función exponencial $f(x) = 4^x$.



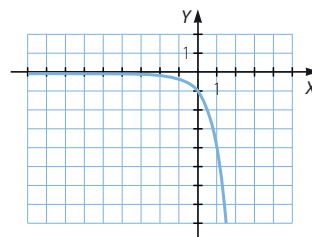
Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

- a) $f(x - 3)$
- b) $f(x + 1)$
- c) $4 + f(x)$
- d) $-f(x)$
- e) $2 - f(x)$
- f) $f(x) - 2$

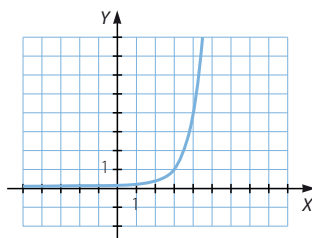
a) $f(x - 3) = 4^{x-3}$



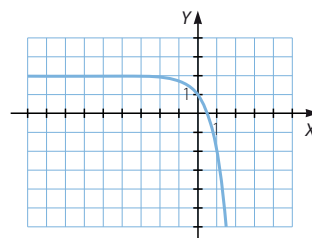
c) $4 + f(x) = 4 + 4^x$



b) $f(x + 1) = 4^{x+1}$

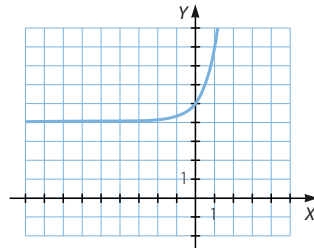


d) $-f(x) = -4^x$

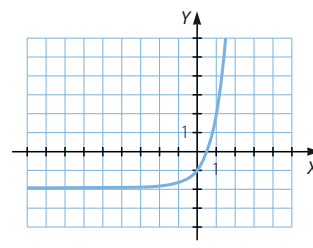


Funciones elementales

e) $2 - f(x) = 2 - 4^x$



f) $f(x) - 2 = 4^x - 2$



057
•••

A partir de la gráfica de la función $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

e) $y = 3^{x+2}$

b) $y = 3^x$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$

a) La función se traslada horizontalmente 3 unidades hacia la derecha.

$$b) y = 3^x = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^x = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{-1}$$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas.

$$c) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{-1}$$

La función es simétrica a ella y el eje de ordenadas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) La función se traslada horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda.

$$e) y = 3^{x+2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{x+2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right]^{-1}$$

Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

$$f) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}\right]^{-1}$$

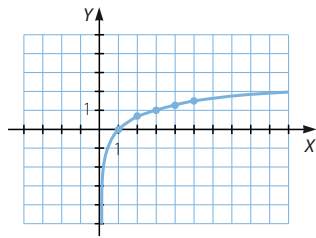
Primero se traslada horizontalmente 2 unidades hacia la derecha y, después, se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de ordenadas.

058

●○○

Con la calculadora, realiza una tabla de valores para representar la función logarítmica $y = \log_3 x$.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0,63	1	1,26	1,46



059

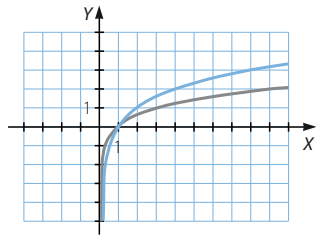
●●○

Representa la gráfica de las funciones.

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_3 x$$

Deduce, a partir de ellas, cómo será la gráfica de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$.



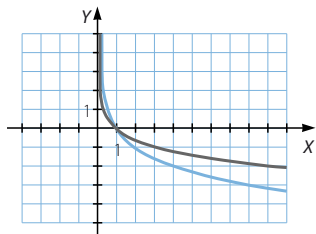
Las gráficas de las funciones $y = \log_5 x$ e $y = \log x$ también son crecientes y pasan por el punto $(1, 0)$, pero su crecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto mayor es el valor de la base.

060

●●○

Representa las funciones $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

¿Cómo serán las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$?

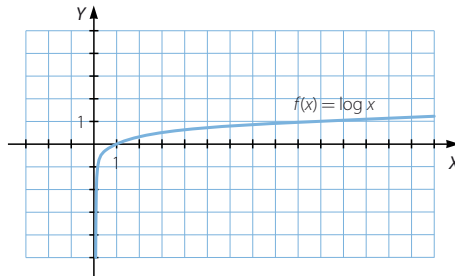


Las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ también son decrecientes y pasan por el punto $(1, 0)$, pero su decrecimiento es más rápido si $0 < x < 1$, y es más lento si $x > 1$, cuanto menor es el valor de la base.

Funciones elementales

061
●●○

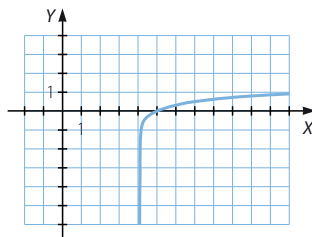
Esta es la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log x$.



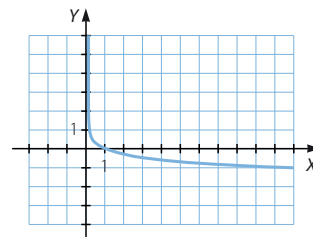
Obtén la expresión algebraica y representa las siguientes funciones.

- a) $f(x - 4)$ c) $4 + f(x + 1)$ e) $2 - f(x - 2)$
 b) $f(x + 3)$ d) $-f(x)$ f) $f(2 - x)$

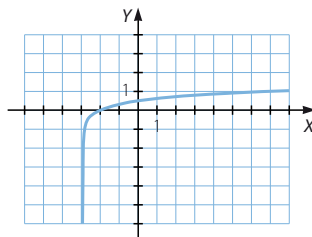
a) $f(x - 4) = \log(x - 4)$



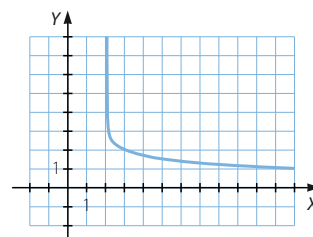
d) $-f(x) = -\log x$



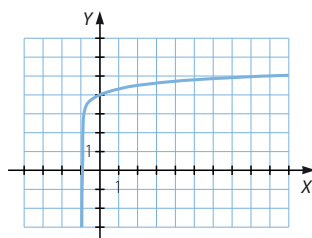
b) $f(x + 3) = \log(x + 3)$



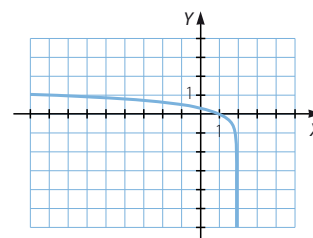
e) $2 - f(x - 2) = 2 - \log(x - 2)$



c) $4 + f(x + 1) = 4 + \log(x + 1)$



f) $f(2 - x) = \log(2 - x)$



062

A partir de la gráfica de la función logarítmica $y = \log_3 x$, explica cómo harías la representación gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = \log_3 3x$ c) $y = \log_3 \left(\frac{1}{x} \right)$ e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ d) $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{x} \right)$ f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} \right)$

a) $y = \log_3 3x = 1 + \log_3 x$

La función se traslada verticalmente 1 unidad hacia arriba.

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x$

La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas.

c) La función es simétrica a ella y el eje de abscisas es el eje de simetría de ambas. Coincide con la anterior.

d) $y = \log_3 \left(\frac{3}{x} \right) = 1 - \log_3 x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente 1 unidad hacia arriba.

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x = \log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} x = -1 + \log_{3^{-1}} x$

Primero se dibuja la función simétrica a ella respecto del eje de abscisas y, después, se traslada verticalmente 1 unidad hacia abajo.

f) $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} \right) = \log_3 x - 2$

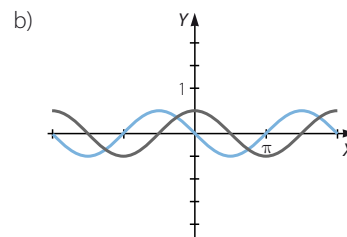
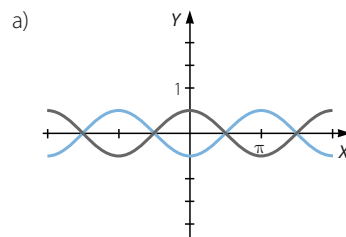
La función se traslada verticalmente 2 unidades hacia abajo.

063

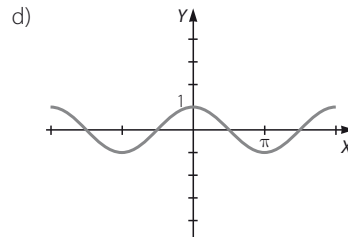
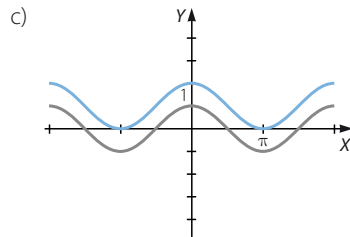
Dibuja la gráfica de $y = \cos x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de las siguientes funciones.

a) $y = -\cos x$ c) $y = 1 + \cos x$

b) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ d) $y = \cos(-x)$



Funciones elementales



064
●●○

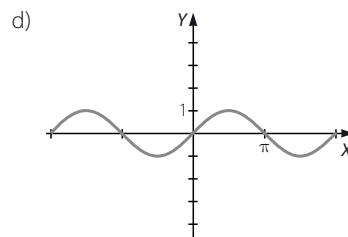
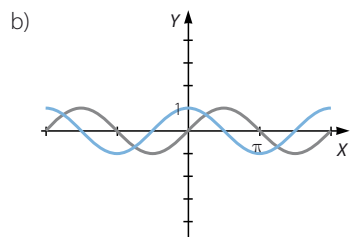
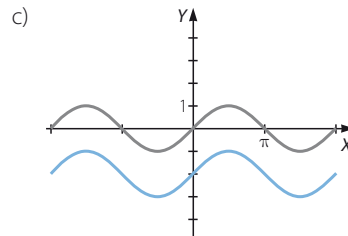
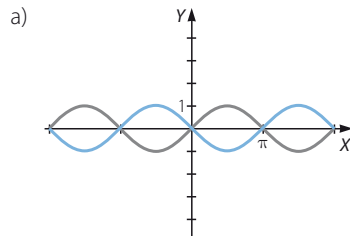
Dibuja la gráfica de $y = \text{sen } x$ y, a partir de ella, haz la gráfica de estas funciones.

a) $y = -\text{sen } x$

c) $y = -2 + \text{sen } x$

b) $y = \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

d) $y = -\text{sen}(-x)$



065
●●○

Realiza una gráfica y estudia las características de estas funciones.

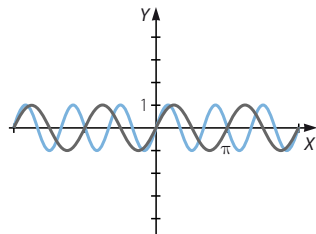
$y = \text{sen } 2x$

$y = \text{sen } 3x$

A partir de lo anterior explica cómo serán las gráficas de las funciones:

a) $y = \text{sen } 4x$

b) $y = \text{sen } 6x$



Las gráficas de las funciones $y = \text{sen } 4x$ e $y = \text{sen } 6x$ tienen el mismo dominio y recorrido y son periódicas, pero el período es mayor cuanto mayor es el valor por el que se multiplica la variable independiente x .

066

Representa y estudia las características de estas funciones.

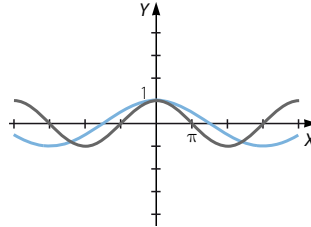
$$y = \cos \frac{x}{2} \qquad y = \cos \frac{x}{3}$$

Explica, a partir del estudio anterior, cómo serán las gráficas de las siguientes funciones.

$$\text{a) } y = \cos \frac{x}{5} \qquad \text{b) } y = \cos \frac{x}{6}$$

a) La gráfica de la función $y = \cos \frac{x}{5}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 10π .

b) La gráfica de la función $y = \cos \frac{x}{6}$ tiene el mismo dominio y recorrido y es periódica, pero el período es 6π .

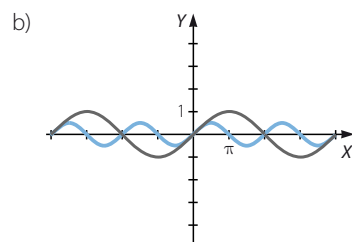
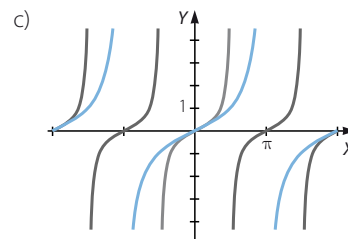
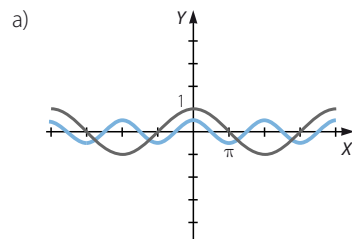


067

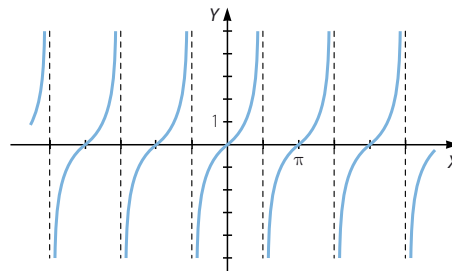
Ayudándote de su gráfica, comprueba que estos pares de funciones no son iguales.

$$\text{a) } y = \cos \left(\frac{x}{2} \right) \qquad y = \frac{\cos x}{2} \qquad \text{c) } y = \text{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \qquad y = \frac{\text{tg} x}{2}$$

$$\text{b) } y = \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \qquad y = \frac{\text{sen} x}{2}$$



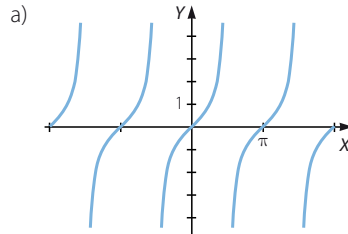
068

Esta es la gráfica de la función trigonométrica $y = \text{tg} x$.

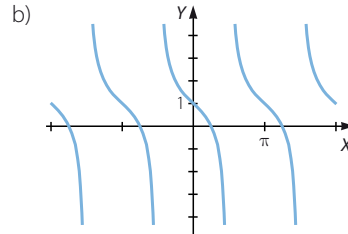
Funciones elementales

Utiliza la gráfica anterior para construir las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$

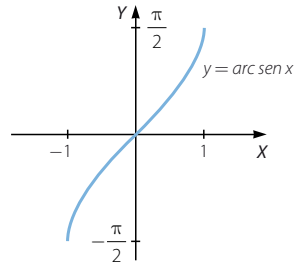


b) $y = 1 - \operatorname{tg} x$



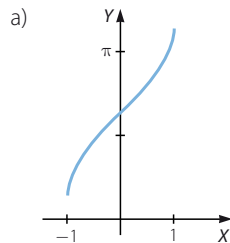
069
●●○

A continuación puedes ver la gráfica de la función $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$.

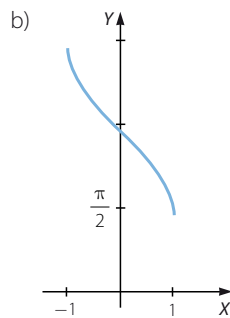


Realiza las gráficas de las funciones.

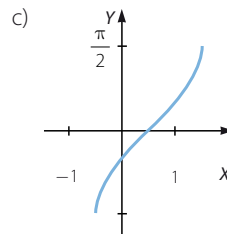
a) $y = 2 + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$



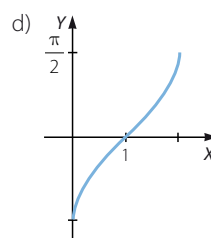
b) $y = 3 - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$



c) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(x - \frac{1}{2} \right)$



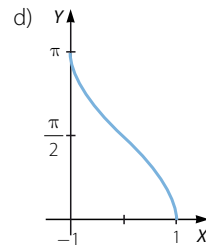
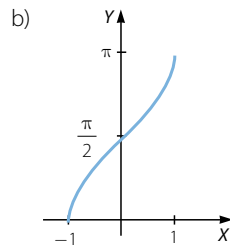
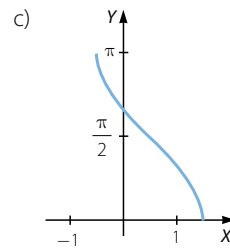
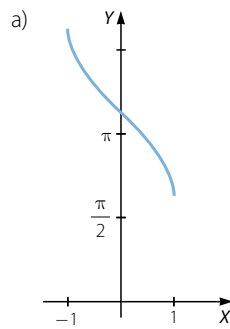
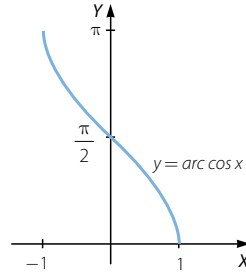
d) $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x - 1)$



070

Esta es la gráfica de la función $y = \arccos x$.
Realiza las gráficas de las funciones.

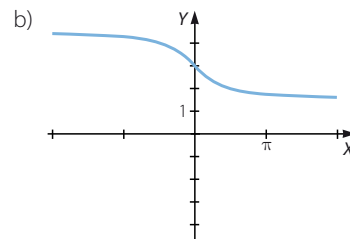
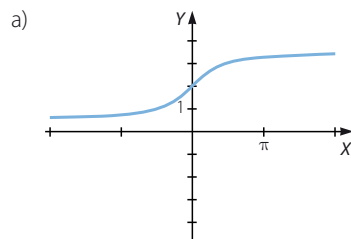
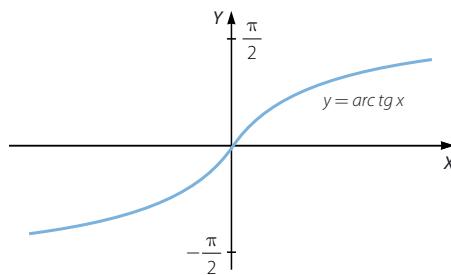
- a) $y = 2 + \arccos x$
- b) $y = 3 - \arccos x$
- c) $y = \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- d) $y = \arccos(x - 1)$



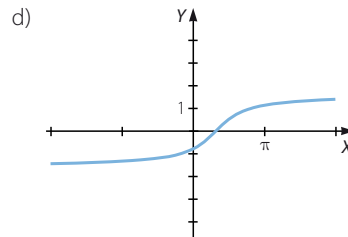
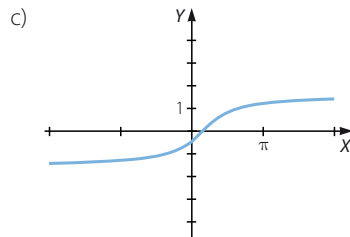
071

Observa la gráfica de la función $y = \arctan x$.
Realiza las gráficas de las funciones.

- a) $y = 2 + \arctan x$
- b) $y = 3 - \arctan x$
- c) $y = \arctan\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- d) $y = \arctan(x - 1)$

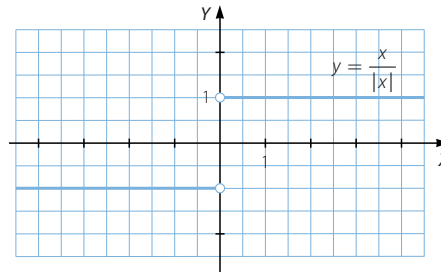


Funciones elementales



072
●●○

La función cuya expresión algebraica es $y = \frac{x}{|x|}$ se llama *función signo de x*.



Encuentra su expresión algebraica como una función definida a trozos.

- a) ¿Cuánto vale si $x = 3$? b) ¿Y si $x = -5$? c) ¿Y si $x = -3,4$?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) $f(3) = 1$ b) $f(-5) = -1$ c) $f(-3,4) = -1$

073
●●○

Representa y describe las características de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ -x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{6}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

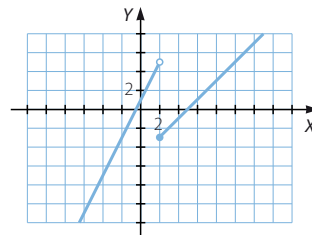
- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Im } f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

No es continua en $x = 2$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



$$b) \text{ Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Im } g = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$$

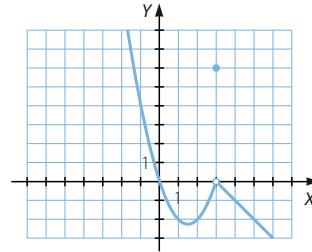
La función es creciente en $\left(\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

y es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{3}{2}$.

No es continua en $x = 3$, y este es un punto de discontinuidad evitable.

No tiene asíntotas. No es simétrica ni periódica.



$$c) \text{ Dom } h = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{Im } h = (-\infty, 0) \cup [6, +\infty)$$

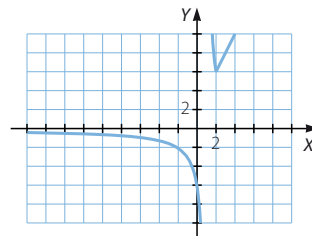
La función es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

No es continua en $x = 1$, y este es un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = 0$.

No es simétrica ni periódica.



074

●●●

Representa y describe las características de estas funciones definidas a trozos.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$a) \text{ Dom } f = \mathbb{R} - \{3\} \quad \text{Im } f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

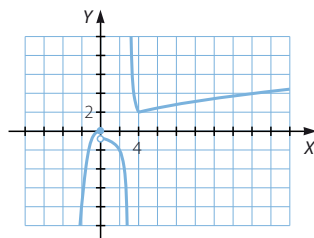
La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 3) \cup (3, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

No es continua en $x = 0$, ni en $x = 3$, y el punto $x = 0$ es de discontinuidad inevitable de salto finito, y el punto $x = 3$ es de discontinuidad inevitable de salto infinito.

Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

No es simétrica ni periódica.



Funciones elementales

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Im } g = (0, 2]$

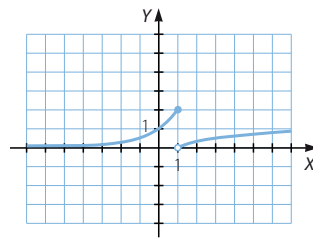
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

No es continua en $x = 1$, y este punto es de discontinuidad inevitable de salto finito.

No tiene asíntotas.

No es simétrica ni periódica.



075
●●○

Escribe como funciones definidas a trozos.

a) $y = |x + 2|$

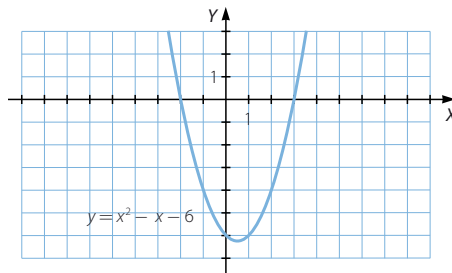
b) $y = |12 - 3x|$

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

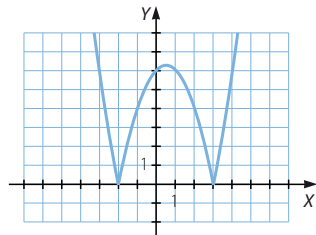
b) $f(x) = \begin{cases} 12 - 3x & \text{si } x \leq 4 \\ -12 + 3x & \text{si } x > 4 \end{cases}$

076
●●○

Observa la gráfica de la función $y = x^2 - x - 6$.



Realiza la gráfica de $y = |x^2 - x - 6|$.



077
•••

Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1 , completando las tablas.

Izquierda de -1	-2	$-1,5$	$-1,1$	$-1,05$
$f(x)$	2	$2,25$	$2,09$	$2,0475$

Derecha de -1	0	$-0,5$	$-0,9$	$-0,95$
$f(x)$	3	$3,5$	$3,9$	$3,95$

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1 .

Por la izquierda de -1 los valores de la función se acercan a 2 , y por la derecha se acercan a 4 .

078
•••

Escribe como una función definida a trozos y representa las funciones.

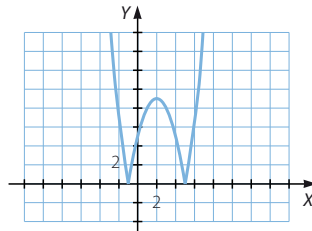
a) $y = |x^2 - 4x - 5|$

c) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

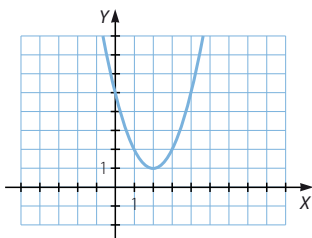
b) $y = |x^2 - 4x + 5|$

d) $y = |-x^2 + 4x - 5|$

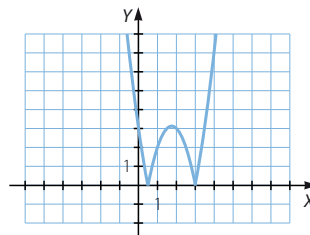
$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq -1, x \geq 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x < 5 \end{cases}$$



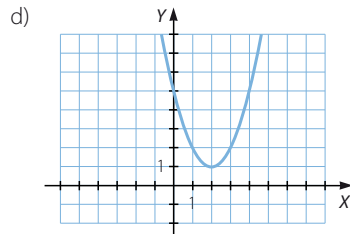
b)



$$c) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, x \geq 3 \\ -2x^2 + 7x - 3 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases}$$



Funciones elementales



079
●●●

Expresa como una función definida a trozos.

a) $y = |x| + |x + 2|$

b) $y = |x + 1| - |1 - x|$

c) $y = |x - 1| - |1 - x|$

d) $y = |2x + 1| - |2 - x|$

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad c) f(x) = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < x \leq 2 \\ x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

080
●○○

El número de alumnos afectados por una epidemia de gripe se obtiene a partir de la función:

$$f(x) = \frac{30x}{x + 2}$$

siendo x el número de días transcurridos desde el comienzo de la epidemia.

a) ¿Cuántos afectados hubo el primer día?

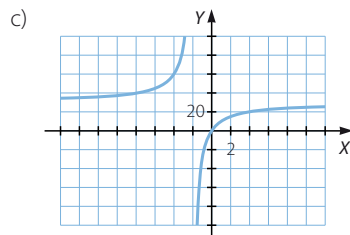
b) ¿En qué momento el número de afectados fue 15?

c) Representa la función y comprueba los resultados que has obtenido en los apartados anteriores.

a) $f(1) = 10$ afectados

b) $\frac{30x}{x + 2} = 15 \rightarrow 30x = 15x + 30 \rightarrow 15x = 30 \rightarrow x = 2$

Hubo 15 afectados dos días después del comienzo de la epidemia.



081
●○○

Un capital de 5.000 € está depositado en un banco, y produce un interés anual del 2%.

- a) ¿Cuánto dinero hay al cabo de un año?
 b) ¿Y a los dos años?
 c) ¿Y a los n años?



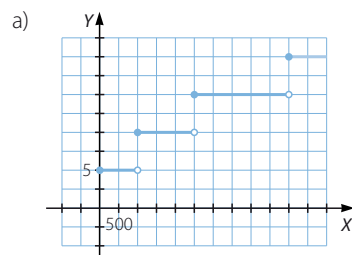
- a) 5.100 € b) 5.202 € c) $C = 5.000 \cdot 1,02^n$

082
●○○

La tabla recoge el interés que ofrece un banco al ingresar dinero durante un año.

Dinero (€)	Interés (%)
Hasta 1.000	5
De 1.000 a 2.500	10
De 2.500 a 5.000	15
Más de 5.000	20

- a) Representa la función que determina el interés obtenido dependiendo del dinero que se ingresa. ¿De qué tipo de función se trata?
 b) Si se ingresan 1.800 €, ¿cuánto dinero tendré al final del año?
 c) ¿Y si ingreso 500 €?



Se trata de una función definida a trozos.

- b) $1.800 \cdot 1,1 = 1.980$ €
 c) $500 \cdot 1,05 = 525$ €

083
●○○

Encuentra las funciones inversas de estas funciones.

- a) $y = 3x - 1$ f) $y = \ln(x + 3)$
 b) $y = \sqrt{x}$ g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x$
 c) $y = \operatorname{sen} 2x$ h) $y = \frac{1 + \log_3 x}{5}$
 d) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2}$ i) $y = |x - 1|$
 e) $y = \operatorname{arc} \cos(x - 2)$ j) $y = x$

Funciones elementales

- a) $y = 3x - 1 \rightarrow y + 1 = 3x \rightarrow x = \frac{y + 1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$
- b) $y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2$
- c) $y = \operatorname{sen} 2x \rightarrow 2x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} y \rightarrow x = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} y}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{2}$
- d) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2} \rightarrow 2y - 1 = \operatorname{tg} x \rightarrow x = \operatorname{arctg} (2y - 1) \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} (2x - 1)$
- e) $y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} (x - 2) \rightarrow \operatorname{cos} y = x - 2 \rightarrow x = 2 + \operatorname{cos} y \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \operatorname{cos} x$
- f) $y = \ln (x + 3) \rightarrow x + 3 = e^y \rightarrow x = e^y - 3 \rightarrow f^{-1}(x) = e^x - 3$
- g) $y = 3 + 4 \cdot 5^x \rightarrow 5^x = \frac{y - 3}{4} \rightarrow x = \log_5 \left(\frac{y - 3}{4} \right) \rightarrow f^{-1}(x) = \log_5 \left(\frac{x - 3}{4} \right)$
- h) $y = \frac{1 + \log_3 x}{5} \rightarrow 5y - 1 = \log_3 x \rightarrow \log_3 x = 5y - 1 \rightarrow x = 3^{5y - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = 3^{5x - 1}$
- i) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \rightarrow x = y + 1 \\ y = -x + 1 \rightarrow x = -y + 1 \end{array} \right\} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$
- j) $y = x \rightarrow x = y \rightarrow f^{-1}(x) = x$

084



Una granja de caracoles ha ajustado sus gastos de producción por x kilogramos de caracoles según la función:

$$G(x) = 2.000 + \frac{1}{200.000} x^3$$

Sus ingresos se rigen por la fórmula:

$$I(x) = 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 + \frac{1}{200.000} x^3$$

Averigua cuál es el número de kilogramos de caracoles con el que se obtiene el beneficio máximo.



Los beneficios de la granja se obtienen a partir de la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= 8.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 + \frac{1}{200.000} x^3 - 2.000 - \frac{1}{200.000} x^3 = \\ &= 6.000 + 2x - \frac{1}{1.000} x^2 \end{aligned}$$

Se trata de una función cuadrática, por lo que su gráfica es una parábola. Al ser el coeficiente de x^2 un valor negativo la parábola está abierta hacia abajo. Entonces la función alcanza su máximo en el vértice de la misma:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2.000 \text{ kg}$$

085

Una ONG ha estimado que el número de personas ingresadas en los hospitales

tras un *tsunami* sigue aproximadamente la fórmula: $P = 1 + \frac{110}{t^2 + 10}$ $t \in (0, 30)$

donde P es el número de personas hospitalizadas, en miles, y t es el número de días transcurridos desde el *tsunami*.

- a) ¿Cuántas personas habrá hospitalizadas el primer día?
 b) ¿Y cuántas habrá al cabo de tres semanas?
 c) Si la capacidad hospitalaria de una isla del área afectada es de 2.000 camas, ¿hasta qué día estuvo desbordada la capacidad?

- a) 11.000 personas
 b) 1.243 personas

$$c) 1 + \frac{110}{t^2 + 10} = 2 \rightarrow t^2 + 120 = 2t^2 + 20 \rightarrow t^2 - 100 = 0 \rightarrow t = \pm 10$$

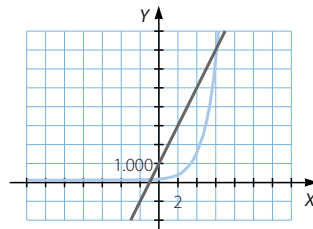
Como el número de personas hospitalizadas decrece según el número de días la capacidad de hospitalización estuvo desbordada hasta el décimo día.

086

La evolución de una población viene determinada por la función $P(t) = 100 \cdot 2^t$, y la de los alimentos que necesitan sigue la función $A(t) = 1.000t + 1.000$.

- a) ¿Cuánta población había al principio? ¿Y alimentos?
 b) ¿Y después de 2 años?
 c) ¿A partir de qué año la población tendrá menos alimentos de los que son necesarios?

- a) $P(0) = 100$ $A(0) = 1.000$
 b) $P(2) = 400$ $A(2) = 3.000$
 c)

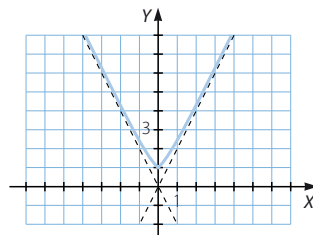


A partir del sexto año.

PARA FINALIZAR...

087

Razona para qué valor de x se hace mayor la diferencia $\sqrt{x^2 + 1} - |x|$



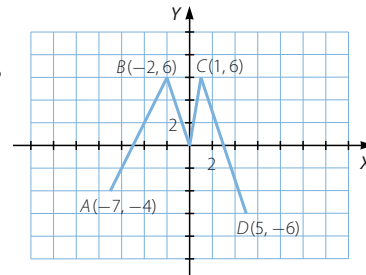
La diferencia alcanza el mayor valor para $x = 0$.

Funciones elementales

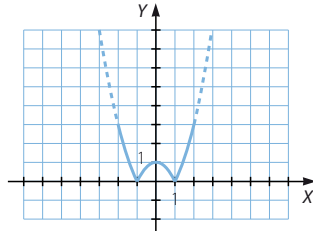
- 088 La función $f(x)$ está formada por cuatro segmentos.

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(x)] = 6$?

Como $f(1) = f(-2) = 6$, las soluciones de la ecuación son los valores para los que las ordenadas son iguales a 1 y a -2 . En total hay seis puntos que cumplen estas condiciones, es decir, la ecuación tiene seis soluciones.



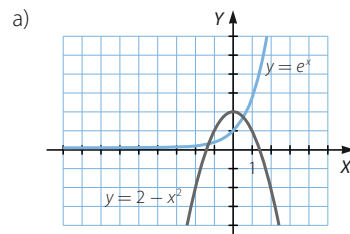
- 089 Calcula los valores máximo y mínimo (extremos absolutos) que puede alcanzar la función $f(x) = |1 - x^2|$ en el intervalo $[-2, 2]$.



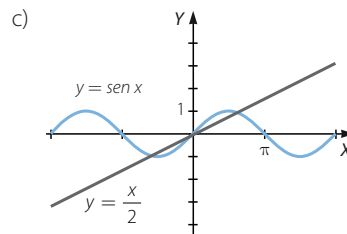
En el intervalo $[-2, 2]$, el máximo valor es 4, ya que los puntos $x = 2$ y $x = -2$ son los máximos absolutos, y el mínimo valor es 0, porque los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son los mínimos absolutos.

- 090 ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$?

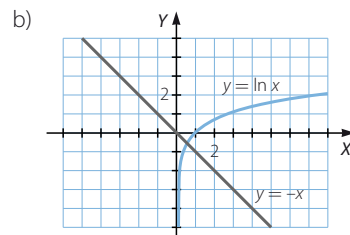
a) $e^x = 2 - x^2$ b) $\ln x = -x$ c) $\text{sen } x = \frac{x}{2}$



Tiene dos soluciones.



Tiene tres soluciones.



Tiene una solución.

- 091 Las manecillas de un reloj miden 20 y 30 cm. Entre las 12 horas y las 12 horas y 30 minutos:

- Expresa el ángulo que forman en función del tiempo, t , medido en minutos.
- Halla el área del triángulo creado al unir sus extremos en función de t . ¿Puede tomar el valor cero? ¿A qué hora alcanza su mayor valor?
- Expresa la distancia entre los extremos de las agujas en función de t .

a) Como la manecilla que marca las horas tarda 12 horas en completar una vuelta

$$(2\pi \text{ radianes}), \text{ su velocidad es: } v_h = \frac{2\pi}{720} = \frac{\pi}{360} \text{ rad/min}$$

$$\text{Análogamente, la velocidad de la otra manecilla es: } v_m = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/min}$$

El ángulo que forman ambas manecillas es la diferencia entre los ángulos recorridos por cada una, en función del tiempo t transcurrido:

$$\alpha = \frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{360}t = \frac{11\pi}{360}t \text{ rad}$$

$$\text{b) } A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \text{sen} \left(\frac{11\pi}{360}t \right) = 300 \text{sen} \left(\frac{11\pi}{360}t \right)$$

Esta función se anula si el ángulo mide $k\pi$ radianes, con $k \in \mathbb{Z}$. En el intervalo de tiempo dado esta condición solo se cumple a las 12 horas ($\alpha = 0$).

Como el mayor valor de la función seno se alcanza cuando el ángulo mide

$\frac{\pi}{2}$ radianes, hay que calcular a qué hora el ángulo formado tiene esta amplitud:

$$\frac{11\pi}{360}t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 16,36 \text{ El área es máxima a las 12 horas y 16,36 minutos.}$$

c) Por el teorema del coseno, la distancia entre las agujas es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} = \sqrt{1.300 - 1.200 \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} = \\ &= 10 \sqrt{13 - 12 \cos \left(\frac{11\pi}{360}t \right)} \end{aligned}$$

092 La temperatura media diaria, medida en grados Celsius, en una ciudad, durante el año pasado, viene dada por la siguiente función.

$$T = \frac{5}{9} \left[13 - 23 \cos \frac{2\pi}{365}(t - 32) \right]$$

donde t es el tiempo en días, correspondiendo $t = 1$ al 1 de enero, y el ángulo está medido en radianes. Halla la temperatura correspondiente a los días 1 de enero y 10 de agosto. Calcula las temperaturas máxima y mínima del año.

Para calcular la temperatura del 1 de enero: $t = 1 \rightarrow T = -3,77$ grados

Para calcular la temperatura del 10 de agosto: $t = 222 \rightarrow T = 19,89$ grados

Como en la expresión dada, el coseno del ángulo está multiplicado por un número negativo, la función alcanza el máximo si su amplitud es de π radianes.

$$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = \pi \rightarrow t = 214,5 \text{ días}$$

Por tanto, la temperatura máxima es: $T = 20$ grados

Análogamente, la función alcanza el mínimo si dicho ángulo mide 0 radianes.

$$\frac{2\pi}{365}(t - 32) = 0 \rightarrow t = 32 \text{ Así, la temperatura mínima es: } T = -5,55 \text{ grados}$$