Regla de Cramer

La **regla de Cramer** sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

El **número de ecuaciones** es igual al **número de incógnitas**.

El **determinante** de la matriz de los coeficientes es **distinto de cero**.

Tales **sistemas** se denominan **sistemas de Cramer**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Llamemos **Δ** el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Y sean:

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots, \Delta_n$

los determinantes que se obtiene al sustituir los coeficientes la columna de los términos independientes) en la 1ª columna , en la 2ª columna, en la 3ª columna y en la enésima columna respectivamente.

Un **sistema de Cramer** tiene **una** sola **solución** que viene dada por las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & b_m & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_m & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_m \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x \qquad + z = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{21}{2} \qquad y = \frac{-8}{2} = -4 \qquad z = \frac{-11}{2}$$

Teorema de Rouché-Fröbenius

Llamamos matriz ampliada de la matriz de los coeficientes de las incógnitas a la matriz que se obtiene añadiendo a la matriz de los coeficientes la columna correspondiente a los términos independientes. Si designamos por A la matriz de los coeficientes, la ampliada se denotaría como A´ (también se utiliza A y A*).

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tenga solución es que el **rango de la matriz de los coeficientes (r) y el de la matriz ampliada (r´)sean iguales.**

- **r = r'** **Sistema Compatible.**
  - **Si r = r'= n** **Sistema Compatible Determinado.**
  - **Si r = r'≠ n** **Sistema Compatible Indeterminado.**
- **r ≠ r'** **Sistema Incompatible.**

Estudiar y resolver, si es posible, el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \\ 2x - 2y \qquad = 6 \end{cases}$$

1. Tomamos la matriz de los coeficientes y le hallamos el rango.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

r(A) = 3

2. Hallamos el rango de la matriz ampliada

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

r(A') = 3

3. Aplicamos el **teorema de Rouché.**

$$r(A) = 3 \qquad r(A') = 3 \qquad n = 3$$

Sistema compatible determinado

4. Se resuelve el sistema, si éste no es incompatible, por la regla de Cramer o por el método de Gauss

Tomamos el sistema que corresponde a la submatriz de orden 3, que tiene rango 3, y lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Sistemas homogéneos

Si un sistema de m ecuaciones y n incógnitas tiene todos los términos independientes nulos se dice que es homogéneo .

Todos los sistemas homogéneos admiten, al menos, la **solución trivial: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.**

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo **tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el nº de incógnitas**, o dicho de otra forma, **que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo**. En este caso, admitirá infinitas soluciones (será compatible indeterminado).

r < n

Resolución de sistemas homogóneos

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$r = 2$ $\quad n = 3$ $\quad$ Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x+y=-\lambda \\ x-y=0 \end{cases} \qquad z=\lambda$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \lambda \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda$$

$$x=-\frac{\lambda}{2} \qquad y=-\frac{\lambda}{2} \qquad z=\lambda$$

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x-y-2z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

r = 3 n = 3

Solución trivial: $x=y=z=0$

Discusión de sistemas

Para discutir sistemas de ecuaciones con o sin parámetros se pueden **utilizar el teorema Rouché-Fröbenius.**

$$\begin{cases} x-y+2z=3 \\ kx+5y-4z=1 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases}$$

1. Hallamos el rango de la matriz de los coefecientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3k - 15 \qquad 3k - 15 = 0 \qquad k = 5$$

Si $k = 5$ $\qquad r(A) = 2$

Si $k \neq 5$ $\qquad r(A) = 3$

2. Hallamos el rango de la matriz ampliada.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ k & 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(A') = 3$$

3. Aplicamos el teorema de Rouché

Si $k = 5$ $\qquad r(A) \neq r(A')$ $\qquad$ Sistema incompatible.

Si $k \neq 5$ $\qquad r(A) = r(A') = 3 \quad n = 3$ $\qquad$ Sistema compatible determinado

4. Resolvemos el sistema compatible determinado por la regla de Cramer (tambíén se puede resolver mediante el método de Gauss).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ k & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -k - 39;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ k & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7k - 45$$

$$x = \frac{8}{3k - 15} \qquad y = \frac{-k - 39}{3k - 15} \qquad z = \frac{7k - 45}{3k - 15}$$