APLICACIONES DE LAS MATRICES

Ejercicio nº 1.-

a) Encuentra los valores de a para los que la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $a=2$.

Ejercicio nº 2.-

Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a=2$ y $a=0$.

Ejercicio nº 3.-

Halla una matriz, X, tal que $AX+B=0$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla X tal que $AX=B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 5.-

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1} para $\lambda=0$.

Ejercicio nº 6.-

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y - z = -5 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x \qquad + z = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 7.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y - z = 6 \\ x \qquad + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 8.-

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 9.-

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 6 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 2y + z = 7 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 10.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 11.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z - t = 3 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ -x + y + z - t = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 12.-

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ -x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+5y-5z=5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 13.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=1 \\ -x+y-z=2 \\ x+y+3z=3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 14.-

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-4y+z=1 \\ -x+2y-z=3 \\ x\qquad\;\, -z=7 \\ x-y\qquad\;\, =2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 15.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=3 \\ -x+3y=-1 \\ -x+6y=2 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 16.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 17.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 18.-

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 19.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 20.-

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 21.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=6 \\ 3x-y+z=5 \\ -x+2y-z=1 \\ x+3y-z=7 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 22.-

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3x+4y-z=-3 \\ x+2y+z=5 \\ x+y+3z=6 \\ -x-y+2z=-1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 23.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{aligned} -x+y-2z&=-5\\ x+3y+z&=-4\\ 7x+5y+11z&=8 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y+z-t&=8\\ x+y-z+t&=1\\ -x+2y+z+2t&=2 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 25.-

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z-t&=-2\\ 2x+y-2z+2t&=3\\ -x-y+z+t&=5 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 26.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax+y&=a\\ (a+1)x+2y+z&=a+3\\ 2y+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 27.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x-y+2z&=0\\ -x+\lambda y+2z&=0\\ 2x+\lambda y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 28.-

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{aligned} mx+y+z&=2\\ x+my&=1\\ x+my+mz&=1 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 29.-

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ.
Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x+2z&=0\\ (\lambda-2)y+z&=0\\ (\lambda-1)x+y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 30.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro *a:*

$$\left.\begin{array}{r} y + az = 1 \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 31.-

Estudia el siguiente sistema, en función de *a* y *b*. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + az = 1 \\ 2x + y + az = 3 \\ x + 2y - az = b \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 32.-

Discute, en función de λ y μ, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \lambda z = 2 \\ -x + 2y - \lambda z = -2 \\ x + 4y + z = \mu \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 33.-

Estudia, en función de *a* y *b*, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay - z = 2 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = b \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 34.-

Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = \mu \\ 2x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 35.-

Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + b + 2a \\ x = b \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS APLICACIONES DE LAS MATRICES

Ejercicio nº 1.-

a) Encuentra los valores de a para los que la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

no es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $a=2$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A|\neq 0$.
Calculamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2a^2+2-(a-2)+a\cdot(a-2)-2a-2=3a^2-5a+2=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm 1}{6} \quad \begin{cases} a=1 \\ a=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, la matriz no es inversible para $a=1$ y para $a=\frac{2}{3}$.

b) Para $a=2$, tenemos que $|A|=4$. La matriz A queda:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj\,(A)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 2.-

Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a=2$ y $a=0$.

Solución:

Para $a = 2$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $|A| = -2$. En este caso, sí existe A^{-1}. La calculamos:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 0$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las dos primeras filas son iguales, $|A| = 0$.

Por tanto, en este caso, no existe A^{-1}.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Halla una matriz, *X*, tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ Existe } A^{-1}$$

Despejamos X en la ecuación dada:

$$AX + B = 0 \rightarrow AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj\,(A)\right)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X:

$$X = -A^{-1}B = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Despejamos X de la ecuación dada:

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Hallamos la matriz inversa de A:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj\,(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj\,(A)\right)^t = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X:

$$X=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 5\\ 3 & -1 & -6\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}-15 & -5 & 5\\ -5 & 0 & -10\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \lambda & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \lambda & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1} para $\lambda=0$.

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A|\neq 0$.
Calculamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ -1 & \lambda & 2\end{vmatrix}=2\lambda^2+4\lambda-1+2\lambda+\lambda^2+4=3\lambda^2+6\lambda+3=3(\lambda+1)^2$$

$$|A|=0 \quad\rightarrow\quad 3(\lambda+1)^2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda+1=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=-1$$

Por tanto, existe A^{-1} para $\lambda\neq -1$.

b) Para $\lambda=0$, la matriz es:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \rightarrow Adj\,(A)=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix} \rightarrow (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A|=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{aligned}-3x+y-z&=-5\\ x+2y+z&=0\\ 2x\qquad\;+z&=3\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\quad\to\quad\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\quad\to\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\to\quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calcula la inversa de A:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ -1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -7\end{pmatrix}\quad\to\quad (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -7\end{pmatrix}\quad\to$$

$$\to\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 7\end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX=C\quad\to\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\to\quad X=A^{-1}C$$

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x=1,\ y=-1,\ z=1$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{4x+2y-z=6}\\ \mathbf{x\qquad +z=1}\\ \mathbf{2x+y+z=3}\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0\quad\rightarrow\quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 6 & 0\\ 2 & -5 & -2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & 6 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & 6 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Despejamos *X:*

$$AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C$$

$$X=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & 6 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x=1,\ y=1,\ x=0$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{2}x+\mathbf{3}y+z&=\mathbf{7}\\ x+y-\mathbf{2}z&=\mathbf{5}\\ y+\mathbf{2}z&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&-2\\0&1&2\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&-2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C$$

Comprobamos que $|A|=3\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-5&4&-2\\-7&5&-1\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

Obtenemos X:

$$X=A^{-1}C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x=1;\ \ y=2;\ \ z=-1$$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x-y+z}&=\mathbf{6}\\ \mathbf{2}\boldsymbol{x-y+z}&=\mathbf{8}\\ \boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y+z}&=\mathbf{7}\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X:

$$AX = C \quad \rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}C \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 2, \;\; y = -1, \;\; z = 3$$

Ejercicio nº 10.-

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -4 \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad AX = C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos *X:*

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \quad X = A^{-1}C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$x = -2,\ y = 0,\ z = 1$

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - t &= 3 \\ 2x + y - z + t &= 2 \\ -x + y + z - t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $ran\,(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $ran\,(A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $ran\,(A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, como *ran* (A) $=$ *ran* (A') < *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Estudia la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ -x + 5y - 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\left(A\right) = 3$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left|A'\right| = 0 \rightarrow ran\left(A'\right) = 3$$

Como *ran* (A) $=$ *ran* (A') $=$ *nº de incógnitas*, el sistema es compatible determinado.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ -x + y - z &= 2 \\ x + y + 3z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left|A\right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\left(A\right) = 2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hdashline 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran\left(A'\right) = 3$$

Como $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es incompatible.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Utiliza el teorema de Rouché para estudiar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \\ x \qquad - z = 7 \\ x - y \qquad = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

- Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Luego, $ran\ (A) \geq 2$.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La } 3^{a} \text{ fila depende de las dos primeras.}$$

Veamos si la 4ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La } 4^{a} \text{ fila también depende linealmente de las dos primeras.}$$

Por tanto, $ran\ (A) = 2$.

- Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:cc} 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{cc:c} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & 7 \end{array}\right| = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, *ran* (A') $=2$.

- Así, como *ran* (A) $=$ *ran* (A') < *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio nº 15.-

Estudia la compatibilidad de este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x - 2y} &= \mathbf{3} \\ \boldsymbol{-x + 3y} &= \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{-x + 6y} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x - y} &= \mathbf{5} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2.$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ \hline -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3$$

Como *ran* (A) $\neq$ *ran* (A'), el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 16.-

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{-x + 3y} &= \mathbf{-5} \\ \boldsymbol{x + y} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{-x + 2y - z} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x - 3y + z} &= \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{2x + y - z} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{aligned} -x + 3y &= -5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$; $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

La solución del sistema es : $x = \frac{4}{3}$; $y = 3$; $x = \frac{14}{3}$

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Resuelve, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$; $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $|A| = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right)$; $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La solución del sistema es: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2$

Ejercicio nº 18.-

Resuelve los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{2x - y = 0} \\ \mathbf{3x + y = 5} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y - z = 2} \\ \mathbf{-x + 2y + z = 4} \\ \mathbf{3x + y + z = 6} \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es: $x = 1,\ y = 2$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y + z = 6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$

Ejercicio nº 19.-

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x + 2y = -5} \\ \mathbf{5x + y = 1} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 2y - z = 1} \\ \mathbf{-3x + y + z = -5} \\ \mathbf{x - y + 3z = 5} \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = -5 \\ 5x + y = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -7$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{28}{-7} = -4$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -4$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + z = -5 \\ x - y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{44}{22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{0}{22} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left.\begin{array}{r} -x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) $$\left.\begin{array}{r} -x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad |A| = -5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = -1$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es : $x = \frac{-15}{17}$, $y = \frac{45}{17}$, $z = \frac{54}{17}$

<u>Ejercicio nº 21.-</u>

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y + 2z = 6} \\ \boldsymbol{3x - y + z = 5} \\ \boldsymbol{-x + 2y - z = 1} \\ \boldsymbol{x + 3y - z = 7} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Empezamos estudiando la compatibilidad del sistema**.** Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Luego, *ran* (*A*) $\geq$ 2.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Por tanto, *ran* (*A*) $=$3.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 0$, tenemos que *ran* $(A') = 3$

Así, *ran* (*A*) $=$ *ran* (*A*') $=$ *nº incógnitas.* El sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, que es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2, \; y = 2, \; z = 1$

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{-3x + 4y - z = -3} \\ \mathbf{x + 2y + z = 5} \\ \mathbf{x + y + 3z = 6} \\ \mathbf{-x - y + 2z = -1} \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

Luego, $ran\,(A) \geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Por tanto, $ran\,(A) = 3$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Como $|A'| = 0$, $ran\,(A') = 3$.

Así, *ran* $(A) = ran(A') = n^{\underline{o}}$ *incógnitas.* El sistema es compatible determinado.
Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación, pues es combinación lineal de las otras tres.

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-44}{-22} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-22}{-22} = 1$$

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$

Ejercicio nº 23.-

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, y resuélvelo si es posible:

$$\left.\begin{aligned} -x + y - 2z &= -5 \\ x + 3y + z &= -4 \\ 7x + 5y + 11z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Luego, *ran* $(A) \geq 2$.

Además, $|A| = 0$. Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que la 3ª columna depende linealmante de las otras dos primeras. Veamos qué ocurre con la 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, *ran* $(A') = 2$.

Como $ran\ (A) = ran\ (A') <$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras. Pasamos la z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= -5 + 2z \\ x + 3y &= -4 - z \end{aligned}\right\}$$

Hacemos $z = \lambda$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -5+2\lambda \\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{array}\right)$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5+2\lambda & 1 \\ -4-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-11+7\lambda}{-4} = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5+2\lambda \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{9-\lambda}{-4} = \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}\lambda;\ y = \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}\lambda;\ z = \lambda,\ \text{con}\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Estudia, y resuelve si es posible, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + 2y + z - t} &= \mathbf{8} \\ \mathbf{x + y - z + t} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{-x + 2y + z + 2t} &= \mathbf{2} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $ran\ (A) \geq 2.$

Además:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

Con esto, también deducimos que $ran\ (A) = 3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, como $ran\ (A) = ran\ (A') <$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 8 + t \\ x + y - z = 1 - t \\ -x + 2y + z = 2 - 2t \end{array}\right\}$$

Hacemos $t = \lambda$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8+\lambda \\ 1 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 2 & 1 & 2-2\lambda \end{array}\right)$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8+\lambda & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2-2\lambda & 2 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{18+9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8+\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9-9\lambda}{9} = 1 - \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8+\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ -1 & 2 & 2-2\lambda \end{vmatrix}}{9} = \frac{18+9\lambda}{9} = 2 + \lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$x = 2 + \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = 2 + \lambda$, $t = \lambda$, con $\lambda \in \text{P}$.

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si tiene solución:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 2y + z - t = -2} \\ \boldsymbol{2x + y - 2z + 2t = 3} \\ \boldsymbol{-x - y + z + t = 5} \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar, estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ \hdashline -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

Luego, $ran\ (A)\geq 2$.

Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

Por tanto, $ran\ (A)=3$.

Con esto, también deducimos que $ran\ (A')=3$, siendo A' la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Así, como $ran\ (A)=ran\ (A')<$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos t al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-2+t \\ 2x+y-2z=3-2t \\ -x-y+z=5-t \end{array}\right\}$$

Hacemos $t=\lambda$. Entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & -2+\lambda \\ 2 & 1 & -2 & 3-2\lambda \\ -1 & -1 & 1 & 5-\lambda \end{array}\right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2.$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2+\lambda & 2 & 1 \\ 3-2\lambda & 1 & -2 \\ 5-\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-32+10\lambda}{-2}=16-5\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2+\lambda & 1 \\ 2 & 3-2\lambda & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{26-8\lambda}{-2}=-13+4\lambda$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -2+\lambda\\ 2 & 1 & 3-2\lambda\\ -1 & -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-16+4\lambda}{-2}=8-2\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$x = 16 - 5\lambda,\ \ y = -13+4\lambda,\ \ z = 8-2\lambda,\ \ t = \lambda,$ con $\lambda \in \mathrm{P}$.

Ejercicio nº 26.-

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax+y=a}\\ \boldsymbol{(a+1)x+2y+z=a+3}\\ \boldsymbol{2y+z=2}\end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiando el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad |A| = 2a-2a-(a+1)=-(a+1)=0 \quad\rightarrow\quad a=-1$$

- Si $a \neq -1 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $a \neq -1$, tenemos un sistema con solución única:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0\\ a+3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}}{-(a+1)}=\frac{-a-1}{-a-1}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & a & 0\\ a+1 & a+3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}{-(a+1)}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a\\ a+1 & 2 & a+3\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}}{-(a+1)}=\frac{-2(a+1)}{-(a+1)}=2$$

Para cada valor de $a \neq 1$, tenemos un sistema diferente.
Cada uno de los sistemas tiene solución única:

$x = 1,\ \ y = 0,\ \ z = 2$

- Si $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces $ran\left(A\right) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas son iguales, luego *ran* (*A*') = 2.

Como *ran* (*A*) = *ran* (*A*') < *nº incógnitas*, en este caso el sistema sería compatible indeterminado. Prescindimos de la 3ª ecuación, pues es idéntica a la 2ª, pasamos z al 2º miembro y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ 2y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda \quad \rightarrow \quad y = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$x = y + 1 = 1 - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 2 - \frac{1}{2}\lambda$$

Las soluciones del sistema son:

$$x = 2 - \frac{1}{2}\lambda; \quad y = 1 - \frac{1}{2}\lambda; \quad z = \lambda \quad , \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio nº 27.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x - y + 2z &= 0 \\ -x + \lambda y + 2z &= 0 \\ 2x + \lambda y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial (0, 0, 0).Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \rightarrow$ el sistema solo tiene la solución trivial (0, 0, 0).
- Si $\lambda = -1$, quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Las dos primeras filas son iguales y, además, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Luego, *ran* $(A) = $ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema sería compatible indeterminado. Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -x - y = -2z \\ 2x - y = z \end{array}\right\} \quad \text{Hacemos} \quad z = \mu$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2\mu \\ 2 & -1 & \mu \end{array}\right)$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2\mu & -1 \\ \mu & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\mu \\ 2 & \mu \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

Las soluciones del sistema son:

$x = \mu;\ y = \mu;\ z = \mu,$ con $\mu \in \mathbb{R}$

<u>Ejercicio nº 28.-</u>

Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro *m*:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{mx + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x + my \qquad = 1} \\ \boldsymbol{x + my + mz = 1} \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = m^3 - m = m(m^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0,\ m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Para cada valor de m, distinto de $0, 1$ y -1, tenemos un sistema diferente, todos ellos con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m(m^2 - 1)} = \frac{m(2m - 1)}{m(m^2 - 1)} = \frac{2m - 1}{m^2 - 1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)}=\frac{m(m-2)}{m(m^2-1)}=\frac{m-2}{m^2-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(m^2-1)}=0$$

$$\textit{Solución}: \left(\frac{2m-1}{m^2-1}, \frac{m-2}{m^2-1}, 0\right)$$

- Si $m=0$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc:c|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las dos últimas filas son iguales y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$

Luego, el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones serían:

$$\left.\begin{array}{l} y=2-z \\ x=1 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \text{ Es decir: } x=1,\ y=2-\lambda,\ z=\lambda, \text{ con } \lambda\in \mathrm{R}$$

- Si $m=1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

- Si $m=-1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\underline{a}}\cdot(-1) \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Las ecuaciones 1ª y 3ª son contradictorias. El sistema sería incompatible.

<u>Ejercicio nº 29.-</u>

Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x \qquad\quad + 2z = 0 \\ (\lambda-2)y + z = 0 \\ (\lambda-1)x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, siempre tiene la solución trivial (0, 0, 0). Veamos si tiene, en algún caso, más soluciones.

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \to \quad |A| = -3\lambda^2+7\lambda-4=0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

- Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \dfrac{4}{3}$ $\quad \to \quad$ El sistema solo tiene la solución trivial $(0,\ 0,\ 0)$.

- Para $\lambda = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

El sistema sería compatible indeterminado.

Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=-2z \\ y=z \end{array}\right\} \quad \text{Hacemos } z=\mu$$

Las soluciones serían: $x=-2\mu$; $y=\mu$; $z=\mu$, con $\mu \in \text{P}$

- Para $\lambda = \dfrac{4}{3}$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc:c|c} 4/3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ \hdashline 1/3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} \dfrac{4}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{-8}{9} \neq 0$, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$

El sistema sería compatible indeterminado.
Para resolverlo, pasamos z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{4}{3}x+2z=0 \\ \dfrac{-2}{3}y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x+6z=0 \\ -2y+3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x=-6z \\ -2y=-3z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=\dfrac{-6}{4}z=\dfrac{-3}{2}z \\ y=\dfrac{-3}{-2}z=\dfrac{3}{2}z \end{array}$$

Las soluciones serían: $x=\dfrac{-3}{2}\mu$; $y=\dfrac{3}{2}\mu$; $z=\mu$, con $\mu \in \text{R}$

Ejercicio nº 30.-

Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro *a:*

$$\left.\begin{array}{r} y + az = 1 \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = 2$ para cualquier valor de a.

Estudiamos el rango de la matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\,(A') = 2$.

Como $ran\,(A) = ran\,(A')$ < *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a.

Podemos prescindir de la 3ª ecuación, pues es combinación lineal de las dos primeras.

Lo resolvemos pasando la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} y + az = 1 \\ x + a^2 z = 2a + 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 1 - az \\ x = 2a + 1 - a^2 z \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda$$

Las soluciones del sistema serían:

$$x = 2a + 1 - a^2\lambda; \;\; y = 1 - a\lambda; \;\; z = \lambda, \;\text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio nº 31.-

Estudia el siguiente sistema, en función de *a* y *b*. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + az = 1 \\ 2x + y + az = 3 \\ x + 2y - az = b \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3a = 0 \rightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquier que sea el valor de b.
- Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & b \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b - 6 = 0 \rightarrow b = 2$$

Si $a = 0$ y $b \neq 2 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es incompatible.

Si $a = 0$ y $b = 2 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas.* El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}$$

Las soluciones son: $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio nº 32.-

Discute, en función de λ y μ, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \lambda z = 2 \\ -x + 2y - \lambda z = -2 \\ x + 4y + z = \mu \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3 - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de μ. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ -2 & 2 & -\lambda \\ \mu & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3 - 3\lambda} = \frac{6 - 3\lambda\mu}{3 - 3\lambda} = \frac{2 - \lambda\mu}{1 - \lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ -1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \mu & 1 \end{vmatrix}}{3 - 3\lambda} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix}}{3-3\lambda} = \frac{3\mu - 6}{3 - 3\lambda} = \frac{\mu - 2}{1-\lambda}$$

La solucion es $\left(\frac{2-\lambda\mu}{1-\lambda}, 0, \frac{\mu-2}{1-\lambda} \right)$.

- Si $\lambda = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ \hdashline 1 & 4 & 1 & \mu \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & \mu \end{vmatrix} = 3\mu - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = 2$$

Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2$ $\rightarrow$ *ran* (A) $= 2 \neq$ *ran* (A') $= 3$. El sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 2$ $\rightarrow$ *ran* (A) $=$ *ran* (A') $= 2 <$ *nº incógnitas.* El sistema es compatible indeterminado.

<u>Ejercicio nº 33.-</u>

Estudia, en función de *a* y *b*, el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{x + ay - z} &= \mathbf{2} \\ \boldsymbol{ax - 2y + 2z} &= \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{2x - y + z} &= \boldsymbol{b} \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -a^2 + 5a - 4 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 4$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado, cualquiera que sea el valor de b.
- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ \hdashline 2 & -1 & 1 & b \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ \hdashline 2 & -1 & b \end{array} \right| = -3b + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1$$

Si $a = 1$ y $b \neq 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) = $2 \neq$ *ran* (A') $= 3$. El sistema sería incompatible.

Si $a = 1$ y $b = 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) $=$ *ran* (A') $= 2 <$ *nº incógnitas.* El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - 2y + 2z &= -1 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x + y &= 2 + z \\ x - 2y &= -1 - 2z \end{aligned} \right\} \quad \text{Hacemos } z = \lambda$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2+\lambda \\ 1 & -2 & -1-2\lambda \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ -1-2\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 1 & -1-2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3-3\lambda}{-3} = 1+\lambda$$

Las soluciones son: $x = 1$; $y = 1+\lambda$; $z = \lambda$, con $\lambda \in$ P

- Si $a = 4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & b \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = -18b - 9 = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

Si $a = 4$ y $b \neq \frac{-1}{2} \rightarrow$ $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. El sistema sería incompatible.

Si $a = 4$ y $b = \frac{-1}{2} \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas*

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x + 4y - z &= 2 \\ 4x - 2y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + 4y &= 2 + z \\ 4x - 2y &= -1 - 2z \end{aligned}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2+\lambda \\ 4 & -2 & -1-2\lambda \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -18; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 4 \\ -1-2\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{6\lambda}{-18} = \frac{-\lambda}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 4 & -1-2\lambda \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-6\lambda-9}{-18} = \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{2}$$

Las soluciones son: $x = \frac{-\lambda}{3}$; $y = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3}$; $z = \lambda$, con $\lambda \in$ R

Ejercicio nº 34.-

Estudia el siguiente sistema según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= \mu \\ 2x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A| = 3\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \;\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Para cada valor de $\lambda \neq 0$ y cada valor de μ, tenemos un sistema diferente, cada uno de ellos con solución única. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{2 + 2\lambda - 2\mu - \lambda\mu}{3\lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \mu & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{3 - 3\mu}{3\lambda} = \frac{1 - \mu}{\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}}{3\lambda} = \frac{-1 + 2\lambda + \mu + 2\lambda\mu}{3\lambda}$$

$$\textit{Solución}: \left(\frac{2 + 2\lambda - 2\mu - \lambda\mu}{3\lambda}, \frac{1-\mu}{\lambda}, \frac{-1 + 2\lambda + \mu + 2\lambda\mu}{3\lambda} \right)$$

- Si $\lambda = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & \mu \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mu - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = 1$$

Si $\lambda = 0$ y $\mu = 1 \;\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas.* El sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 1 \;\rightarrow$ *ran* (A) = 2 $\neq$ *ran* (A') = 3. El sistema es incompatible.

<u>Ejercicio nº 35.-</u>

Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de los parámetros que contiene. Resuélvelo en los casos en los que sea compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x + y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{5x + y} &= \mathbf{3 + b + 2a} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{b} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

- Observando la 2ª y la 4ª ecuación, deducimos que, si $a \neq b$, el sistema es incompatible.

- Si $a = b$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x = a \\ 5x + y = 3 + 3a \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 - 2x = 3 - 2a \\ x = a \\ y = 3 + 3a - 5x = 3 + 3a - 5a = 3 - 2a \end{array}$$

El sistema sería compatible determinado. La solución es: $x = a$, $y = 3 - 2a$