# UNIDAD 08. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

**DEFINICIÓN DE DERIVADA** **C-08-01**

**1.**

**a)** 4

**b)** 3

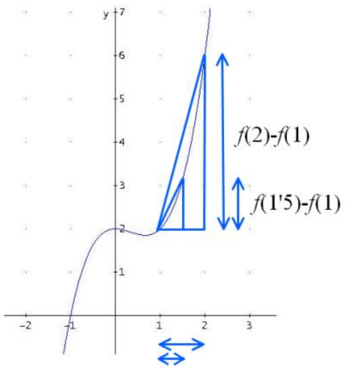
**c)** $\frac{1}{e-1}$

**d)** $\frac{31}{24}$

**2.**

$$\text{TVM}_{[1,2]}\,f=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=4$$

$$\text{TVM}_{[1,1'5]}\,f=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=2{,}25$$




La inclinación de la gráfica en el intervalo [1 , 2] es mayor que en el intervalo [1 , 1,5], de ahí el valor de la TVM en cada uno de ellos. Sobre la gráfica se puede visualizar este hecho comparando los ángulos formados. Podríamos además conocer el ángulo de inclinación con la función inversa de la tangente: arctg (4) y arctg (2,25).

**3.**

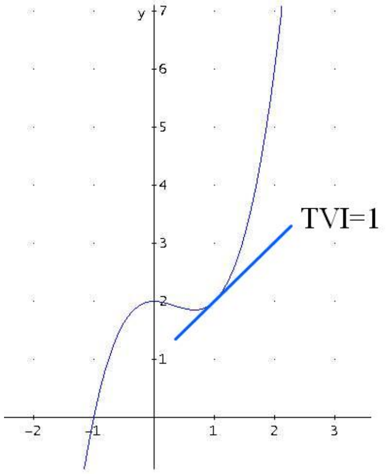
**a)** 2

**b)** –2

**4.**

TVI = 1




**5.** A medida que tomamos intervalos más pequeños y cercanos a $x$ = 1 los valores de la TVM van tendiendo a la TVI. Esta es la definición de derivada en un punto:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**DERIVADAS I** **C-08-02**

**1.**

**a)** Es continua en $x$ = –2, pero $f'(-2^-) = -1 \neq 2 = f'(-2^+) \rightarrow$ No es derivable en $x$ = –2.

**b)** Es continua en $x$ = 1 y $f'(1^-) = f'(1^+) = 1 \rightarrow$ Es derivable en $x$ = 1.

**2.**

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(-1) = 7$, $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$, $f'(3) = 15$

**a)** $x = 3$

**b)** $x = \frac{1}{2}$

**c)** $x = \frac{2}{3}$

**3.**

**a)** $\mathrm{f}(x)=-2x^5+3x^2 \rightarrow \mathrm{f}'(x)=-10x^4+6x$

**b)** $\mathrm{f}(x)=x^4+x^3+x^2+x+1 \rightarrow \mathrm{f}'(x)=4x^3+3x^2+2x+1$

**c)** $\mathrm{f}(x)=\frac{5}{2}x^6-2x^3+1 \rightarrow \mathrm{f}'(x)=15x^5-6x^2$

**d)** $\mathrm{f}(x)=2x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{3}{5}} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=3x^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

**e)** $\mathrm{f}(x)=(2x-3)^4 \rightarrow \mathrm{f}'(x)=8(2x-3)^3$

**f)** $\mathrm{f}(x)=\left(3x-x^3\right)^3 \rightarrow \mathrm{f}'(x)=3\left(3-3x^2\right)\left(3x-x^3\right)^2$

**g)** $\mathrm{f}(x)=(x-1)^{-2} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=-2(x-1)^{-3}$

**h)** $\mathrm{f}(x)=\left(x^2+x-1\right)^{-5} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=-5(2x+1)\left(x^2+x-1\right)^{-6}$

**i)** $\mathrm{f}(x)=\left(6x^3-x^2\right)\left(1-3x^3\right) \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\left(18x^2-2x\right)\left(1-3x^3\right)+\left(6x^3-x^2\right)\left(-9x^2\right)$

**j)** $\mathrm{f}(x)=x^4\left(3x^3+x^2\right) \rightarrow \mathrm{f}'(x)=4x^3\left(3x^3+x^2\right)+x^4\left(9x^2+2x\right)$

**k)** $\mathrm{f}(x)=\frac{x^2-2x}{2x^3-3x} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{-2x^4+8x^3-3x^2}{\left(2x^3-3x\right)^2}=\frac{-2x^2+8x-3}{\left(2x^2-3\right)^2}$

**l)** $\mathrm{f}(x)=\frac{x^3-2}{x^5-1} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{-2x^7+10x^4-3x^2}{\left(x^5-1\right)^2}$

**m)** $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{1+x-x^3} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{-1+3x^2}{\left(1+x-x^3\right)^2}$

**n)** $\mathrm{f}(x)=\frac{x-1}{x+1} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

**o)** $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^2-2x} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

**p)** $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^3+4x^2-1} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{3x^2+8x}{2\sqrt{x^3+4x^2-1}}$

**q)** $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{4x^2-1} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{8x}{3\sqrt[3]{\left(4x^2-1\right)^2}}$

**r)** $\mathrm{f}(x)=\sqrt[4]{x-1} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

**s)** $\mathrm{f}(x)=\left(x^2-5\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=\frac{4}{3}x\left(x^2-5\right)^{-\frac{1}{3}}$

**t)** $\mathrm{f}(x)=(2x-1)\sqrt{x^3+4} \rightarrow \mathrm{f}'(x)=2\sqrt{x^3+4}+\frac{3x^2(2x-1)}{2\sqrt{x^3+4}}=\frac{10x^3-3x^2+16}{2\sqrt{x^3+4}}$

**u)** $f(x)=\frac{(2x^2-1)}{\sqrt{x^3+4}} \to f'(x)=\frac{2x^4+3x^2+32x}{2\sqrt{(x^3+4)^3}}$

**DERIVADAS II** **C-08-03**

**1.**

**a)** $f(x)=2^{2x-1} \to f'(x)=2\left(2^{2x-1}\right)\ln 2=2^{2x}\ln 2$

**b)** $f(x)=10^{2x^2+1} \to f'(x)=4x\left(10^{2x^2+1}\right)(\ln 10)$

**c)** $f(x)=e^{2x^2+1} \to f'(x)=4xe^{2x^2+1}$

**d)** $f(x)=\log_3(3x+1) \to f'(x)=\frac{3}{3x+1}\log_3 e$

**e)** $f(x)=\log\left(x^2+2x\right) \to f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x}\log e$

**f)** $f(x)=\ln(2x+3) \to f'(x)=\frac{2}{2x+3}$

**g)** $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2-3x\right) \to f'(x)=(2x-3)\cos\left(x^2-3x\right)$

**h)** $f(x)=\cos\left(5x^3-3x^2\right) \to f'(x)=-\left(15x^2-6x\right)\operatorname{sen}\left(5x^3-3x^2\right)$

**i)** $f(x)=\operatorname{tg}\left(x+2x^2\right) \to f'(x)=(1+4x)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(x+2x^2\right)\right)$

**j)** $f(x)=\operatorname{arcsen}(2x-1) \to f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

**k)** $f(x)=\arccos\left(3x-x^2\right) \to f'(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{1-\left(3x-x^2\right)^2}}$

**l)** $f(x)=\operatorname{arctg}\left(1+2x^3\right) \to f'(x)=\frac{6x^2}{1+\left(1+2x^3\right)^2}$

**2.**

**a)** $f(x)=2^{x^2+1}-\ln\left(x^3\right) \to f'(x)=2x(\ln 2)2^{x^2+1}-\frac{3x^2}{x^3}$

**b)** $f(x)=5\left(3x^2+x\right)^2-\cos x \to f'(x)=10\left(3x^2+x\right)(6x+1)+\operatorname{sen} x$

**c)** $f(x)=\operatorname{sen}(x-1)+e^x \to f'(x)=\cos(x-1)+e^x$

**d)** $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln\left(x^3+2\right) \to f'(x)=2x\cdot\ln\left(x^3+2\right)+\frac{3x^2\left(x^2+1\right)}{x^3+2}$

**e)** $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\cos\left(2x^3+x\right) \to$

$f'(x)=2x\cdot\cos\left(2x^3+x\right)-\left(x^2-1\right)\cdot\left(6x^2+1\right)\operatorname{sen}\left(2x^3+x\right)$

**f)** $f(x)=(2x-1)\cdot e^{x^2-x} \to f'(x)=2e^{x^2-x}+(2x-1)(2x-1)e^{x^2-x}=\left(2+(2x-1)^2\right)e^{x^2-x}$

**g)** $f(x)=\dfrac{e^{(x^3-x+1)}}{3x^2-1}\rightarrow$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-1)e^{(x^3-x+1)}(3x^2-1)-6xe^{(x^3-x+1)}}{(3x^2-1)^2}=\frac{\left((3x^2-1)^2-6x\right)e^{(x^3-x+1)}}{(3x^2-1)^2}$$

**h)** $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}\rightarrow f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)-(x+1)\dfrac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}=\dfrac{\ln(x+1)-1}{\ln^2(x+1)}$

**i)** $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right)\rightarrow$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x+1}-(x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}\right)\cos\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right)=\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)}\right)\cos\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

**j)** $f(x)=\ln^3(3x-2)\rightarrow f'(x)=\dfrac{9\ln^2(3x-2)}{3x-2}$

**k)** $f(x)=2\operatorname{sen}^4(3x^2-2)\rightarrow f'(x)=48x\operatorname{sen}^3(3x^2-2)\cos(3x^2-2)$

**l)** $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{3x^2-2}\rightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2-2}}}{1+3x^2-2}=\dfrac{3x}{(3x^2-1)\sqrt{3x^2-2}}$

**3.**

**a)** $f(x)=\ln\dfrac{x^2-3x^3}{(x^2-1)^2}\rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x^2-3x^3}{(x^2-1)^2}\right)}{\dfrac{x^2-3x^3}{(x^2-1)^2}}=\dfrac{3x^3-2x^2+9x-2}{(x^2-1)(x-3x^2)}$

**b)** $f(x)=\dfrac{(3x^2+x)^2}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{x+1}{\cos x}\rightarrow$

$$f'(x)=\frac{2(3x^2+x)(6x+1)\operatorname{sen}x-(3x^2+x)^2\cos x}{\operatorname{sen}^2x}-\frac{\cos x+(x+1)\operatorname{sen}x}{\cos^2x}=$$

**c)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}\right)\rightarrow$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{2(x^2+1)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}\right)+\cos\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}\right)\right)$$

**d)** $f(x)=e^{(x^2+1)}\cdot\ln(x^2+1)\rightarrow$

$$f(x)=2xe^{(x^2+1)}\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2xe^{(x^2+1)}}{x^2+1}=\left(2x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\right)e^{(x^2+1)}$$

**4.**

**a)** $f(x)=x^{x^2+1}\rightarrow f'(x)=x^{x^2+1}\left(2x\ln x+\frac{x^2+1}{x}\right)$

**b)** $f(x)=(x^2+x)^{\cos x}\rightarrow f'(x)=(x^2+x)^{\cos x}\left(-\ln(x^2+x)\operatorname{sen}x+\frac{(2x+1)\cos x}{x^2+x}\right)$

**c)** $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}\rightarrow f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{4}{x(x-1)(x+1)}\right)$

## DERIVADAS CON WIRIS — C-08-04

**1.**

**a)** $f(x)=\frac{1}{1+x-x^3}\rightarrow f'(x)=\frac{-1+3x^2}{(1+x-x^3)^2}$

**b)** $f(x)=\frac{x-1}{x+1}\rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

**c)** $f(x)=\ln(2x+3)\rightarrow f'(x)=\frac{2}{2x+3}$

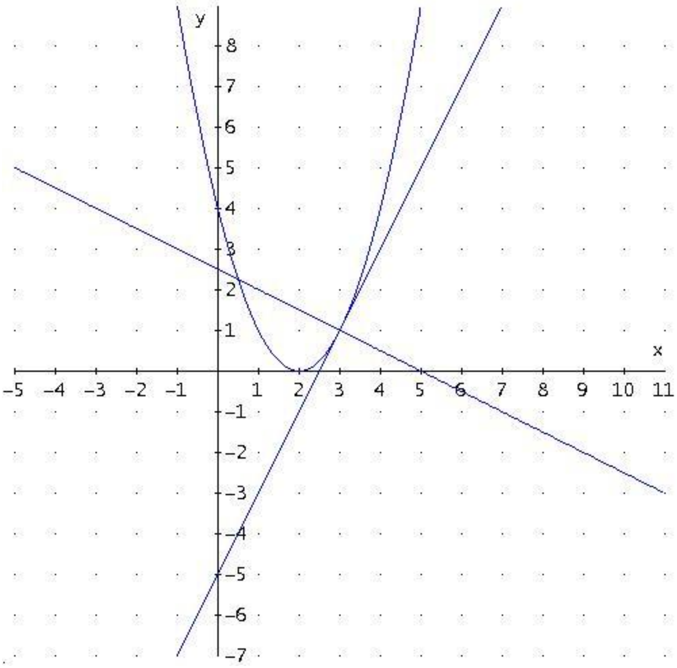
**d)** $f(x)=\operatorname{sen}(x^2-3x)\rightarrow f'(x)=(2x-3)\cos(x^2-3x)$

## APLICACIONES DE LA PRIMERA DERIVADA

**C-08-05**

**1.**




Recta tangente: $y = 2x - 5$

Recta normal: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

**Recta tangente**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***x*** | 3 | 0 | 4 |
| ***y*** | 1 | –5 | 3 |

**Recta Normal**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***x*** | 3 | 0 | 4 |
| ***y*** | 1 | 5/2 | 1/2 |

**2.**

**a)** Recta normal: $y = \frac{-4}{3}x + \frac{5}{6}$

Recta tangente: $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

**b)**

Recta tangente: $y = 2x - 2\pi$

Recta normal: $y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{2}$

**3.**
**a)** C-D-F
**b)** A
**c)** E
**d)**
Mínimo: F ($x$ = 5)
Máximo: C ($x$ = –3)
Creciente en: (–∞ , –3) ∪ (5 , + ∞)
Decreciente en: (–3 , 5)

**4.**

**a)**
Mínimo: $x$ = 3
Creciente en: (3 , +∞)
Decreciente en: (–∞ , 3)

**b)**
Mínimo: $x$ = 1
Máximo: $x$ = –5
Creciente en: (–∞ , –5) ∪ (1 , + ∞)
Decreciente en: (–5 , 1)

c)
Mínimo: $x$ = 4
Máximo: $x$ = –1
Creciente en: (–∞ , –1) ∪ (4 ,+ ∞)
Decreciente en: (–1 , 4)

**d)** Punto de inflexión: $x$ = 1
Creciente en: (–∞ , + ∞)

**e)** Decreciente en: (–∞ , 0) ∪ (0 , + ∞)

**f)**
Mínimo: $x$ = 1
Máximo: $x$= –1
Creciente en: (–∞, –1) ∪ (1,+ ∞)
Decreciente en: (–1 , 0) ∪ (0 , 1)

**g)**
Máximo: x = $\frac{3}{2}$

Creciente en: (–∞ , 1) ∪ (1 , $\frac{3}{2}$)



**h)**

Mínimo: $x = -1$
Creciente en: $(-1\ ,\ +\infty)$
Decreciente en: $(-\infty\ ,\ -1)$

**i)**
Máximo: $x = 1$
Decreciente en: $(1,+\infty)$
Creciente en: $(-\infty,1)$

**APLICACIONES DE LA DERIVADA A LAS CIENCIAS SOCIALES C-08-06**

**1.** Esta función alcanza un mínimo en $x = 4$. Por tanto, convendrá adquirir las acciones el cuarto mes.

**2.** Entre 1 000 y 5 000 esta función alcanza el máximo en 2 500; por tanto, a 2 500 rpm el motor trabaja a un rendimiento óptimo

**3. a)** La función alcanza el mínimo en $t = 2$ y el máximo en $t = 6$.

**b)** Para $t = 2$, tenemos que T (2) = 2 ºC.

Para $t = 6$, T (6) = 10 ºC.

**4 a)** El número de bacterias para $x = 0$ es: B (0) = 3 000.

**b)** La función alcanza un máximo en $x = 10$, por lo que a partir de ese día el número de bacterias fue disminuyendo; es decir, este tratamiento fue efectivo.

## VOCABULARIO MATEMÁTICO C-11-08

**1.**
El móvil parte con una cierta velocidad que va decreciendo hasta alcanzar el tiempo $x$ = 2,5, durante una hora está en reposo y vuelve a ponerse en movimiento, en este caso aumentando cada vez más la velocidad.

**2.**
La función f ($x$) tiene un máximo en el punto $x$ = –1 y un mínimo en $x$ = 5.

Es creciente en los intervalos (–∞ , –1) y (5 , +∞) y decreciente en el intervalo (–1 , 5).

Tiene un punto de inflexión en $x$ = 2, es convexa en el intervalo (–∞ , 2) y cóncava en el intervalo (2 , +∞).

La primera derivada se anula en los puntos $x$ = –1 y $x$ = 5. Estos puntos coinciden con los extremos de la función f ($x$).

Además es positiva en: (–∞ , –1) ∪ (5 , +∞) y negativa en el intervalo (–1 , 5), intervalos donde f ($x$) crece y decrece, respectivamente.

La segunda derivada es negativa en el intervalo (-∞ , 2), que es donde la función f ($x$) es convexa y positiva en el intervalo (2 , +∞), donde f ($x$) es cóncava.

El valor que anula la segunda derivada es $x$ = 2. Este punto es el punto de inflexión de la función f ($x$).